UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Elementos de la Cohomología de De Rham desde la Teoría de Fibrados.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
Carlos Francisco Flores Galicia.

ASESOR DE TESIS:
Dr. Enrique Castañeda Alvarado.

El Cerrillo, Piedras Blancas, México.
Fecha de presentación:
Mayo 2023.

“Caballeros, esto es sin duda cierto, es absolutamente paradójico, no podemos comprenderlo y no sabemos lo que significa, pero lo hemos demostrado y, por lo tanto, sabemos que debe ser verdad.”

Charles Sanders Peirce.

Índice general

Introducción

La teoría de la cohomología de De Rham y los fibrados vectoriales son dos conceptos fundamentales en Geometría Diferencial y Topología Algebraica. La relación entre estos dos conceptos se basa en el hecho de que los fibrados vectoriales proporcionan una manera natural de definir formas diferenciales en variedades, y son justo las formas diferenciales los tabiques con los que se construye la cohomología de De Rham.

En 1918, el matemático alemán Hermann Weyl dio la primera definición formal de los fibrados vectoriales en su libro "Raum, Zeit, Materie" (Espacio, Tiempo, Materia), donde utilizó el concepto para describir la geometría del espacio-tiempo. Definió un fibrado vectorial como una colección de espacios vectoriales, uno en cada punto de un espacio base, junto con una estructura de continuidad entre ellos. La definición de Weyl sentó las bases para el desarrollo posterior de la teoría de fibrados vectoriales en matemáticas, particularmente en los campos de la Topología y la Geometría Diferencial. Su definición fue más tarde perfeccionada y ampliada por otros matemáticos como Élie Cartan, Fritz Noether, Michael Atiyah y Raoul Bott.

Por otra parte, en la década de 1920, el matemático francés Élie Cartan se dedicó a estudiar las formas diferenciales. Cartan, especulando sobre las conexiones entre Topología y Geometría Diferencial, conjeturó lo que hoy se conoce como el Teorema de De Rham en un artículo de 1928. Tres años más tarde, en su tésis doctoral de 1931, el matemático suizo Georges De Rham demostró que las formas diferenciales satisfacen las mismas propiedades que los ciclos y las fronteras de la homología, demostrando que existe una dualidad entre lo que ahora se denomina cohomología de De Rham y homología singular con coeficientes reales. Aunque De Rham no definió explícitamente su cohomología en este artículo, estaba implícita en su trabajo. Una definición formal de la cohomología de De Rham apareció hasta 1938.

La relación entre los fibrados vectoriales y la cohomología de De Rham se basa en el hecho de que ambos se utilizan para estudiar las propiedades topológicas y geométricas de las variedades diferenciables. Los resultados de ahí obtenidos, poseen aplicaciones interesantes. Por ejemplo, en la teoría de gauge, los fibrados vectoriales se utilizan para describir las interacciones entre partículas subatómicas y se relacionan con la cohomología de De Rham a través de la teoría de Chern-Weil. En el estudio de las ondas gravitacionales, la cohomología de De Rham se puede utilizar para estudiar la topología del espacio-tiempo y comprender el comportamiento de las ondas gravitacionales. En particular, en el artículo "Topology of the physical phase space of general relativity" de J. Barbero (1994), se muestra que el espacio fásico de la relatividad general tiene una topología no trivial, que puede ser estudiada utilizando la cohomología de De Rham. En el estudio de los agujeros negros, la cohomología de De Rham se puede utilizar para estudiar la topología del horizonte de sucesos de un agujero negro y comprender el comportamiento de estos en un contexto más general. En el artículo "Black Hole Entropy and Differentiable Structures" de A. Ashtekar y J. Baez (1995), se muestra cómo se puede utilizar la cohomología de De Rham para estudiar la entropía de un agujero negro.

El propósito de este texto es desarrollar la teoría de fibrados vectoriales sobre variedades diferenciables con la profundidad suficiente para poder definir a partir de ellos conceptos como los campos vectoriales y los campos tensoriales. En el primer capítulo, se definirá lo que son las variedades diferenciables y sus espacios tangentes. En el segundo capítulo, se procederá a definir el fibrado tangente, y se tomará como motivación para introducir a los fibrados vectoriales y a los sistemas coordenados móviles. En el tercer capítulo, se abordará a los tensores con sus operaciones y a las formas diferenciales, además de la derivada exterior. Finalmente, en el cuarto capítulo, se introducirán los conceptos básicos del Álgebra Homológica y Teoría de Categorías, y con ayuda de ellos se estudiará la cohomología de De Rham.

Capítulo 1

Variedades diferenciables

Las definiciones y los resultados principales de este capítulo son obtenidos de [3, Cap 2], [7, Cap 3], [6, Cap 2 y 3, de Vol 1], [5, Cap 1].

1.1. Variedades topológicas y estructuras diferenciables

Normalmente nuestro primer contacto con la geometría se da con lo que se conoce como Geometría clásica o Geometría euclidiana. En ella, consideramos un plano E (llamado plano Euclidiano) de área infinita y objetos llamados puntos y rectas. Luego, con los Postulados de Euclides podemos demostrar teoremas muy útiles e interesantes. Después aprendemos la Geometría analítica, donde la novedad es que se introducen coordenadas al espacio Euclidiano, dando lugar a lo que normalmente se conoce como plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Todos los resultados de la Geometría clásica se cumplen en la Geometría analítica.

El proceso de asignar coordenadas a cierto espacio es la clave para entender a las variedades. La asignación de coordenadas a un espacio lo hacemos a través de las funciones coordenadas. Para el caso de $\mathbb{R}^n$ es sencillo. Como sabemos, los puntos de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$. No debemos confundir puntos con vectores, los vectores siempre los representaremos por columnas

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

La *i-ésima función coordenada estandar* de $\mathbb{R}^n$, o simplemente la *i-ésima coordenada en* $\mathbb{R}^n$, es la función $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $r_i(q) = q_i$. Como podemos notar, actúa de forma similar a la función proyección. Así, cada punto $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $(r_1(q), r_2(q), ..., r_n(q))$. Quizá el lector piense que es innecesario tener que definir las funciones coordenadas estándar, pareciera que su tarea es solo complicar la representación de los puntos de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, la introducción de estas funciones es necesaria, pues como veremos más adelante, no hay una forma única de asignar coordenadas a los puntos de un determinado espacio. Las funciones coordenadas por tanto, reflejan el hecho de que un punto no es lo mismo que sus coordenadas, y jugarán un papel fundamental a la hora de definir las variedades.

El primer paso para definir a las variedades topológicas es conocer lo que son los espacios localmente euclidianos. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.1.1. Un espacio topológico M es *localmente euclidiano* de dimensión n, si para todo $p \in M$ existe un abierto U tal que $p \in U$ y un homeomorfismo $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. Al par (U, ϕ) lo llamaremos *carta* y al conjunto U *entorno coordenado.*

Lo que queremos decir con la definición anterior es que si consideramos un punto $p \in M$ y nos fijamos en una porción muy pequeña, llamada vecindad, que contenga a p, entonces esta pequeña porción se parece a $\mathbb{R}^n$ posiblemente deformado. Si lo anterior sucede con cada punto de M, entonces M es un espacio localmente euclidiano de dimensión n. Un ejemplo de un espacio localmente euclidiano de dimensión 1 es la circunferencia S^1. Un ejemplo de espacio localmente euclidiano de dimensión 2 es una esfera S^2. En las siguientes imágenes se ilustra como localmente se asemejan a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

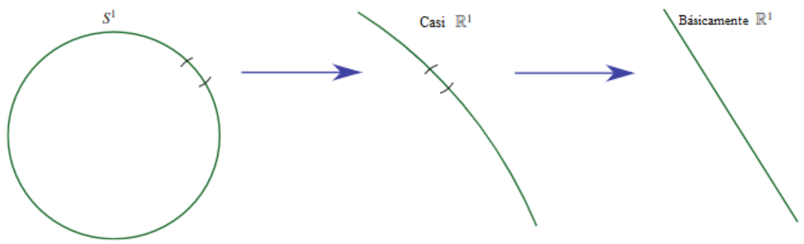

Figura 1.1: Aquí, una pequeña porción de la circunferencia S^1, se amplía para mostrar que localmente se parece a $\mathbb{R}$.

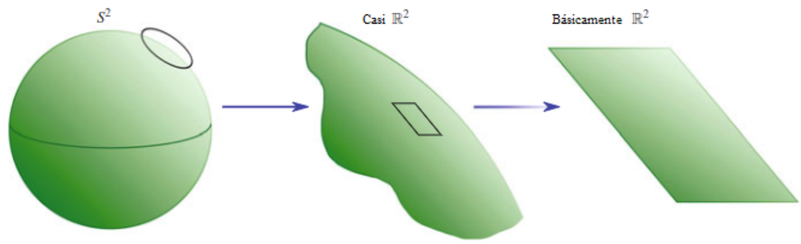

Figura 1.2: Aquí, una pequeña porción de la esfera S^2, se amplía para mostrar que localmente se parece a $\mathbb{R}^2$.

La gráfica de la función $f(x) = |x|$ también es localmente euclidiana. En este caso, a diferencia de los ejemplos anteriores, en el punto $(0, 0)$ se observa que pareciera que "doblamos" al espacio $\mathbb{R}$ formando así un pico (a esto nos referíamos anteriormente con "posiblemente deformado").

El papel que juega la función ϕ en la definición anterior es justamente la de asignar coordenadas a los puntos de $U \subseteq M$. De hecho, las cartas (U, ϕ) se llaman así porque su tarea es la de funcionar como mapas del espacio M, es decir, nos dirán las ubicaciones de los puntos de M. Notemos que la función ϕ está determinada por n funciones componentes $x_i : M \to \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq n$, a las cuales llamamos *coordenadas locales en U* o simplemente *coordenadas en U*. Las coordenadas en U se definen por $x_i = r_i \circ \phi : M \to \mathbb{R}$, donde r_i es la i-ésima función coordenada estándar de $\mathbb{R}^n$. De esta manera, para $p \in M$, sus coordenadas son $\phi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$. Con frecuencia denotaremos a las cartas haciendo explicitas a las funciones componentes de ϕ, esto es $(U, \phi) = (U, x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplo 1.1.1. *La circunferencia unitaria S^1 es localmente euclidiano de dimensión 1.*

En efecto, el conjunto S^1 es un espacio topológico visto como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Luego, consideremos el abierto $U_1 = S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y la función $\phi_1 : U_1 \to (-1,1) \subset \mathbb{R}$ dada por $\phi_1(x,y) = x$. Es claro que ϕ_1 es un homeomorfismo, pues es continua y su inversa $\phi_1^{-1} : (-1,1) \to U_1$ dada por $\phi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ también es continua. Por tanto, para el arco superior de S^1, es decir, $S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, una carta es (U_1, ϕ_1).

Consideremos ahora el abierto $U_2 = S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, que sería el arco inferior de S^1, y a la función $\phi_2 : U_2 \to (-1,1)$ dada por $\phi_2(x,y) = x$. Nuevamente, ϕ_2 es un homeomorfismo, pues es continua y su inversa $\phi_1^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ también es continua. Así, (U_2, ϕ_2) es una carta para el arco inferior. Notemos ahora que los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ no están contenidos en U_1 ni en U_2, de forma que debemos hallar cartas para ellos también, pues la definición lo exige.

Consideremos el abierto $U_3 = S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, que seria el arco izquierdo de S^1, donde claramente $(-1,0) \in U_3$. Su respectivo homeomorfismo sería $\phi_3 : U_3 \to (-1,1)$ dado por $\phi_3(x,y) = y$ y su inversa $\phi_3^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y)$. En consecuencia, (U_3, ϕ_3) es una carta para el arco izquierdo. Finalmente, el abierto $U_4 = S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, que sería el arco derecho de S^1, cumple claramente $(1,0) \in U_4$. El respectivo homeomorfismo sería $\phi_4 : U_4 \to (-1,1)$ dado por $\phi_4(x,y) = y$ y su inversa $\phi_4^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$. De esta manera, (U_4, ϕ_4) es una carta para el arco derecho. Hemos probado así que S^1 es localmente euclidiano de dimensión 1.

Notemos que las cartas (U_1, ϕ_1) y (U_4, ϕ_4) asignan distintas coordenadas a los puntos del arco de S^1 que está en el primer cuadrante. Por ejemplo, el punto $(0.6, 0.8) \in S^1$ tiene coordenadas $\phi_1(0.6, 0.8) = 0.6$ bajo la carta (U_1, ϕ_1) y coordenadas $\phi_4(0.6, 0.8) = 0.8$ bajo la carta (U_4, ϕ_4). ¡Un punto no es lo mismo que sus coordenadas!

Definición 1.1.2. Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico M que es de Hausdorff, segundo numerable y localmente euclidiano de dimensión n.

La circunferencia S^1 es un ejemplo de variedad topológica. Probamos ya que es localmente euclidiano de dimensión 1, por otra parte, las condiciones de ser de Hausdorff y segundo numerable también las cumple pues es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Recordemos un subespacio "hereda" las propiedades de ser de Hausdorff y segundo numerable de su "espacio padre".

Una vez que hemos definido nuestro objeto de estudio, nuestro siguiente objetivo es poder usar las herramientas desarrolladas en cálculo pero esta vez sobre variedades. Para ello deberemos introducir las definiciones correctas de tal forma que el desarrollo de la teoría se sienta "natural". El puente que nos permite introducir los conceptos del cálculo en las variedades es una estructura que asociamos a las variedades, llamada *estructura diferenciable*. Ella nos permitirá definir funciones diferenciables, campos vectoriales y un gran número de conceptos muy útiles. Antes de definir dicha estructura, conviene conocer la motivación de su definición, y es justo lo que analizamos a continuación.

La idea de una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tiene sentido porque está definida entre espacios topológicos, pero la noción de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ en principio no tiene sentido. La razón es que la definición de función diferenciable que conocemos de los cursos de análisis involucra que el dominio de la función sea $\mathbb{R}^n$ y el codominio $\mathbb{R}^m$, para $m, n \in \mathbb{N}$. Carece de sentido para nosotros hablar en general de una función diferenciable cuyo dominio es una variedad M. Sería razonable y natural proponer la siguiente definición: Si $U \subseteq M$ es un abierto y elegimos un homeomorfismo $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$, decimos que $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en U, si se cumple que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\phi(U)$. Sin embargo, existe un problema, y es que podría existir otro homeomorfismo $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, con $U \cap V \neq \emptyset$, que no cumple que $f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sea diferenciable. En otras palabras, el concepto de diferenciabilidad sería relativo al homeomorfismo. Un ejemplo sencillo que ilustra lo anterior es el siguiente: sea $M = \mathbb{R}$. Consideremos las cartas $(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \phi)$, donde $I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene regla de correspondencia $\phi(x) = x^3$. Entonces, si $f : M \to \mathbb{R}$ es también la identidad, tenemos que $(f \circ I_{\mathbb{R}}^{-1})(x) = x$ es diferenciable en $x = 0$, pero $(f \circ \phi^{-1})(x) = x^{1/3}$ no, pues $\phi^{-1}(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$.

Nuestras intenciones son no renunciar a la definición propuesta anteriormente, de modo que debemos solucionar el problema que ha surgido, es decir, queremos que el concepto de diferenciabilidad no dependa de la carta elegida. Para ello, notemos que si exigimos seleccionar solo a los homeomorfismos ϕ y ψ que cumplan que

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V) \tag{1.1}$$
$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \tag{1.2}$$

sean diferenciables, automáticamente se elimina el problema que teníamos. Así, bajo la exigencia anterior, nuestra definicion propuesta de función diferenciable no depende de la carta elegida. Notemos que lo único que hemos hecho es no tomar en cuenta a aquellos homeomorfismos que no sean diferenciables bajo las composiciones (1.1) y (1.2), y es justo esto, como veremos más adelante, lo que nos permitirá dar aquella estructura a M de la que hablábamos anteriormente. Lo anterior motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.1.3. Dadas dos cartas (U, ϕ), (V, ψ) de una variedad topológica M, llamamos funciones de cambio de coordenadas a las funciones (1.1) y (1.2). (Figura 1.2.1).

Definición 1.1.4. Decimos que dos cartas (U, ϕ), (V, ψ) de una variedad topológica son C^∞-*compatibles*, si sus funciones de cambio de cooordenadas son C^∞, es decir, se pueden derivar infinitas veces obteniendo siempre derivadas continuas.

Es posible que el lector sospeche que la relación "ser C^∞-compatible" entre cartas sea una relación de equivalencia. Sin embargo, a pesar de ser reflexiva y simétrica, la transitividad no se cumple siempre. Para verificarlo, consideremos tres cartas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_3), (U_3, \phi_3)$ y supongamos que (U_1, ϕ_1) es C^∞-compatible con (U_2, ϕ_2), y (U_2, ϕ_2) es C^∞-compatible con (U_3, ϕ_3). Note que las tres cartas están simultáneamente definidas en la triple intersección $U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Por tanto, la composición

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$$

es C^∞, pero solo cuando el dominio es $\phi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$, y no necesariamete cuando el dominio es $\phi_1(U_1 \cap U_3)$. A priori no sabemos nada de $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ en el dominio $\phi_1\big((U_1 \cap U_3) - (U_1 \cap U_2 \cap U_3)\big)$, de modo que no podemos concluir que (U_1, ϕ_1) y (U_3, ϕ_3) son C^∞-compatibles.

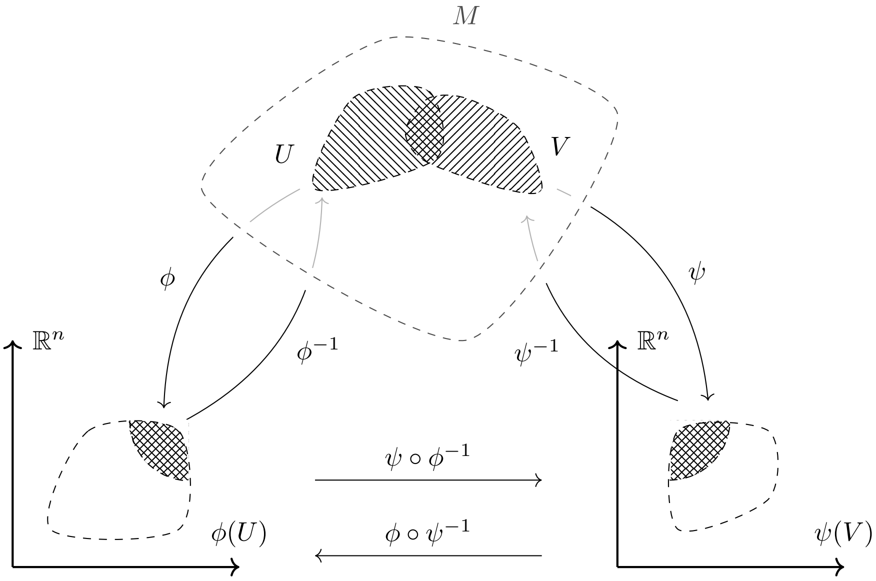

Figura 1.2.1

Definición 1.1.5. Un atlas de clase C^∞ de una variedad M es una familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas que son C^∞-compatibles por pares y además $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Por otra parte, una carta (V, ψ) es compatible con $\mathcal{A}$, si (V, ψ) es C^∞-compatible con cada $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$.

Lema 1.1.0.1. *Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ un atlas de clase C^∞ de una variedad M. Si (V, ψ) es C^∞-compatible con el atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, y (W, ω) es C^∞-compatible con el atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, entonces (V, ψ) y (W, ω) son C^∞-compatibles.*

Demostración. Sea $p \in V \cap W$. Necesitamos probar que $\omega \circ \psi^{-1}$ es C^∞ en $\psi(p)$. Como $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es una atlas de clase C^∞ de M, $p \in U_\alpha$ para algún α. Entonces p está en la triple intersección $V \cap W \cap U_\alpha$. Luego, como $\omega \circ \psi^{-1} = (\omega \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$ es C^∞ en $\psi(V \cap W \cap U_\alpha)$, tenemos en particular que es C^∞ en $\psi(p)$. Y como p era un punto arbitrario de $U \cap W$, hemos probado que $\omega \circ \psi^{-1}$ es C^∞ en $\psi(V \cap W)$. De manera análoga, $\psi \circ \omega^{-1}$ es C^∞ en $\omega(V \cap W)$. $\square$

Teorema 1.1.1. *Todo atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de clase C^∞ de una variedad M está contenido en un único atlas maximal.*

Demostración. Definimos el conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los atlas de clase C^∞, y el orden $\leq$ está definido por la inclusión $\subseteq$ (la inclusión en efecto determina un orden parcial). Así, $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$ si y sólo si $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Observe que toda cadena $\mathcal{A}_1 \leq \cdots \leq \mathcal{A}_n$ está acotada por $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, y en consecuencia por el lema de Zorn se tiene que existe $\mathcal{M} \in P$ tal que $\mathcal{M}$ es maximal.

Para la unicidad, sea $\mathcal{M}$ el atlas maximal que acabamos de deducir por el lema de Zorn, donde claramente contiene a $\mathcal{A}$. Supongamos que existe otro atlas maximal $\mathcal{M}'$ que contiene a $\mathcal{A}$, de forma que todas las cartas en $\mathcal{M}'$ son compatibles con $\mathcal{A}$, y en consecuencia, pertenecen también a $\mathcal{M}$. Esto prueba que $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Pero como ambos son maximales, tenemos que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. $\square$

Al atlas maximal le llamaremos *estructura diferenciable*, y es justo la estructura que buscabamos. Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.6. Una *variedad diferenciable* es toda variedad topológica M que tenga una estructura diferenciable $\mathcal{D} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Se le denota por $(M, \mathcal{D})$.

Con lo probado anteriormente, tenemos que para mostrar que una variedad M es una variedad diferenciable, únicamente debemos verificar dos cosas

- M es espacio de Hausdorff y segundo numerable.
- M tiene un atlas de clase C^∞ (no necesariamente maximal, pues el teorema anterior garantiza su existencia).

De aquí en adelante nos vamos a referir a las variedades diferenciables simplemente como variedades.

Ejemplo 1.1.2. *La circunferencia unitaria S^1 es una variedad diferenciable.*

Hemos probado que S^1 es una variedad topológica, de modo que es de Hausdorff y segundo numerable. Por otra parte, es sencillo verificar que las cartas dadas en el ejemplo 1.1.1 constituyen una estructura diferenciable.

Ejemplo 1.1.3. *El espacio $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable.*

Es claro que $\mathbb{R}^n$ una variedad topológica. Podemos asignarle la estructura diferenciable $\mathcal{U}_{\mathbb{R}^n}$, que es aquella que tiene a la carta $(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})$, donde $I_{\mathbb{R}^n}$ es la función identidad de $\mathbb{R}^n$. A dicha estructura diferenciable la llamaremos *estructura diferenciable usual de* $\mathbb{R}^n$.

Es importante notar que una variedad topológica puede tener distintas estructuras diferenciables.

Ejemplo 1.1.4. *Dos estructuras diferenciables para $\mathbb{R}$.*

Consideremos a la variedad diferenciable $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}})$ y también a la variedad diferenciable $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$, donde $\mathcal{V}$ contiene a la carta $(\mathbb{R}, g)$, con $g(x) = x^3$, y también a todas las cartas que son C^∞-compatibles con $(\mathbb{R}, g)$. Es facil verificar que $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ no son iguales, pues $(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}}) \notin \mathcal{V}$ ya que $(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, g)$ no son C^∞-compatibles.

Proposición 1.1.1.1. *Sea M un conjunto, y supongamos que existe una familia $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M, junto con funciones inyectivas $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ para todo α, tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Para todo α, $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Para cualesquiera α, β, se cumple que $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

(iii) Siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es C^∞.

(iv) La familia $\{U_\alpha\}$ es numerable y cubre a M.

(v) Para cualesquiera $p, q \in M$, existen los conjuntos disjuntos U_α, U_β con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces M tiene una estructura diferenciable tal que las cartas (U_α, ϕ_α) pertenecen a dicha estructura.

Demostración. Definimos la topología tomando como base los conjuntos de la forma $\phi_\alpha^{-1}(V)$, donde $V \subset \phi_\alpha(U_\alpha)$ es abierto. Para probar que estos conjuntos son en efecto una base para una topología, consideremos los conjuntos $\phi_\alpha^{-1}(V)$ y $\phi_\beta^{-1}(W)$. Las propiedades (ii) y (iii) implican que $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, y por tanto también de $\phi_\alpha(U_\alpha)$. Así, si $p \in \phi_\alpha^{-1}(V) \cap \phi_\beta^{-1}(W)$, entonces

$$\phi_\alpha^{-1}\big(V \cap \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(W)\big) = \phi_\alpha^{-1}(V) \cap \phi_\beta^{-1}(W)$$

es un elemento de la base que contiene a p. Cada función ϕ_α es entonces un homeomorfismo (por definición), y así M es un espacio topológico localmente euclidiano de dimensión n. Por (iv), $\{U_{\alpha_i}\}$ es una colección numerable de conjuntos U_α que cubren a M, cada U_{α_i} tiene una base numerable, y la unión de todos ellos es una base numerable para M, de modo que M es segundo numerable. Por (v), se tiene que M es un espacio de Hausdorff. Finalmente, (iii) garantiza que la colección $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un atlas de clase C^∞.

□

Ya que tenemos definido lo que es una variedad diferenciable, tenemos todos los ingredientes para dar la definición formal de una función diferenciable entre variedades diferenciables.

Definición 1.1.7. Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{B})$ variedades diferenciables de dimensión n y m respectivamente. Una función continua $f : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$, si existen las cartas (U, ϕ) con $p \in U$ y (V, ψ) con $f(p) \in V$, tales que la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable (en el sentido usual del cálculo multivariable) en $\phi(p)$. La función continua $f : M \to N$ es diferenciable si es diferenciable en todo M.

La siguiente pregunta a responder es: ¿Qué puede decirse de las diferencias entre las variedades diferenciables $(M, \mathcal{A}_1)$ y $(M, \mathcal{A}_2)$?, es decir, la misma variedad topológica con distintas estructuras diferenciables. En el contexto de las variedades diferenciables, a las funciones que preservan la estructura se les llama *difeomorfismos*. Que dos variedades sean difeomorfas significa esencialmente que el estudio de una puede reducirse al estudio de la otra. De este modo, bajo nuestro paradigma, dos variedades difeomorfas son indistinguibles.

Definición 1.1.8. Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{B})$ dos variedades diferenciables. La función $f : M \to N$ es un difeomorfismo si y solo si f es una biyección tal que tanto f como f^{-1} son de clase C^∞.

Es fácil probar, que $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_\mathbb{R})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ del ejemplo 1.1.4 son difeomorfas bajo el difeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3$.

Definición 1.1.9. Sea $(M, \mathcal{D})$ una variedad diferenciable de dimensión n, (U, ϕ) una carta y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Recordemos que r_i es la i-ésima función coordenada estandar de $\mathbb{R}^n$. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_i en p como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r_i}(\phi(p))$$

donde $\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{r_i}(\phi(p))$ es la derivación parcial usual de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ respecto a la $i-$ésima coordenada.

La prueba de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 1.1.1.2. *Si $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$ es una carta de una variedad diferenciable, entonces*

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Definición 1.1.10. Sea $f : N \to M$ una funcion diferenciable. Si $(U, \phi) = (U, x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(V, \psi) = (V, y_1, y_2, ..., y_m)$ son cartas de N y M respectivamente, tales que $f(U) \subseteq V$, definimos por

$$f_i := y_i \circ f = r_i \circ \psi \circ f : U \to \mathbb{R}$$

a la i-ésima componente de f en la carta (V, ψ). A la matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ le llamamos *matriz Jacobiana* de f relativo a las cartas (U, ϕ) y (V, ψ). Cuando N y M tienen la misma dimensión, el determinante $\det[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]$ se llama *determinante Jacobiano* de f relativo a las dos cartas. El determinante Jacobiano también se denota por $\frac{\partial(f_1,f_2,...,f_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}$.

De aquí en adelante, nos referiremos con frecuencia a las variedades diferenciables simplemente como variedades, y las denotaremos simplemente por M, sin especificar su estructura diferenciable.

1.2. Espacios tangentes

Una herramienta básica pero poderosa para analizar el comportamiento de funciones de manera local es el principio de linealización, según el cuál podemos aproximar el comportamiento de una función complicada a una función lineal que es más sencilla. Un ejemplo de esto es cuando mediante el Teorema de Taylor hallamos un polinomio de grado 1 que, considerado en una vecindad muy pequeña, la función original y el polinomio son indistinguibles. Lo que nos interesará es analizar el comportamiento de funciones entre variedades diferenciables. Este análisis en general se vuelve complicado, así que usaremos el principio de linealización para facilitar la tarea. Como sabemos, las variedades diferenciables de dimensión n al considerarse en vecindades pequeñas se parecen a $\mathbb{R}^n$, y la ventaja que tienen los espacios $\mathbb{R}^n$ es que son a su vez variedades diferenciables y espacios vectoriales. De esta manera, cualquier variedad diferenciable, al considerarse en una vecindad muy pequeña, es indistinguible a $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial. En consecuencia, para una función entre variedades $f : N \to M$, podemos hallar la función lineal (o transformación lineal) f_*, a la cual llamaremos diferencial de f, que cumple ser la mejor aproximación lineal a f en una vecindad muy pequeña. Nuestra primera tarea por tanto, y siguiendo la idea anterior, es asignar a cada punto $p \in M$ un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$ al que llamaremos *espacio tangente*.

Si U es un abierto de la variedad M, denotamos por $C^\infty(U)$ al conjunto de todas las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ que son C^∞. Observe que con las operaciones de suma y producto de funciones $C^\infty(U)$ es un anillo.

Definición 1.2.1. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y U_1, U_2 abiertos de M que contienen a p. Si $f_1 \in C^\infty(U_1)$ y $f_2 \in C^\infty(U_2)$, decimos que f_1 y f_2 están relacionadas si y sólo si existe un abierto $U \subseteq U_1 \cap U_2$ tal que $p \in U$ y $f_1\Big|_U = f_2\Big|_U$.

Es fácil ver que la relación anterior es una relación de equivalencia. A las clases inducidas por esta relación las denotamos por $[f]_p$ y las llamamos *gérmenes de la función f en p*. Al conjunto de todos los gérmenes en p, lo denotamos por $C_p^\infty(M)$. Por otra parte, notemos que de manera local en el punto p, para cada germen podemos definir $[f]_p = f$ sin ambigüedad, pues a final de cuentas los elementos de esta clase terminan siendo la misma función para algún abierto U que contiene a p.

Definición 1.2.2. Una función $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una *derivación* en p, si es lineal y cumple la regla de Leibniz, esto es $D(fg) = Dfg(p) + f(p)Dg$. Denotamos por $\mathcal{D}_p(M)$ al conjunto de todas las derivaciones en p.

Definición 1.2.3. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un *vector tangente* en p es una derivación en p.

El espacio tangente a M en p es el conjunto T_pM de vectores tangentes a M en p; este conjunto tiene una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$(aD_1 + bD_2)(f) = aD_1f + bD_2f,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_p(M)$ y $f \in C_p^\infty(M)$.

Proposición 1.2.0.1. *Si $D \in \mathcal{D}_p(M)$, entonces $D(c) = 0$ para cualquier función constante c.*

Demostración. Por linealidad, tenemos que $D(c) = cD(1)$, de modo que es suficiente con probar que $D(1) = 0$. Por la regla de Leibniz tenemos que

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$$

restando $D(1)$ en ambos lados de la igualdad obtenemos que $D(1) = 0$.

□

Definición 1.2.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$. Consideremos un entorno coordenado (U, ϕ) de p y una recta $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ definida por $c(t) = \phi(p) + tv$ con $v \in \mathbb{R}^n$. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces la derivada de f en dirección v, se define por

$$D_vf(p) = \lim_{t\to 0} \frac{(f \circ \phi^{-1})(\phi(p) + tv) - (f \circ \phi^{-1})(\phi(p))}{t}$$

Observe que cuando el vector v en la definición anterior es alguno de la base canónica e_i, entonces la derivada direccional se trata de la derivada parcial $D_{e_i}f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Proposición 1.2.0.2. *Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $f, g \in C_p^\infty(M)$. Entonces el operador de derivada direccional evaluada en p con dirección $v \in \mathbb{R}^n$, denotado por $D_v\Big|_p$, es un vector tangente en p.*

Demostración. Como $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces por la derivación usual se cumple que la derivada del producto fg es $D_v\Big|_p(fg) = \Big(D_v\Big|_p f\Big)g(p) + f(p)D_v\Big|_p g$. □

Lema 1.2.0.1. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, con $0 \in V$ y $g \in C^\infty(V)$. Entonces existen $h_1, h_2, ..., h_n \in C^\infty(V)$ tales que*

$$g(q) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} q_ih_i(q)$$

con $q = (q_1, ..., q_n) \in V$ y $h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial r_i}(0)$.

Demostración. Sea $q \in V$ y definamos $G(t) = g(tq)$, entonces

$$g(q) - g(0) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq)dt = \sum_{i=1}^n q_i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq)dt$$

definiendo $h_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq)dt$ se obtiene

$$g(q) - g(0) = \sum_{i=1}^n q_i h_i(q)$$

y al sumar $g(0)$ en ambos lados se obtiene el lema.

□

Proposición 1.2.0.3. *La función $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_p(M)$ dada por*

$$\Theta(v) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \quad \textit{para} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Verifiquemos que Θ es una transformación lineal. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\Theta(av + w) &= \sum_{i=1}^n (av_i + w_i) \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \\ &= a \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p + \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \\ &= a\Theta(v) + \Theta(w).\end{aligned}$$

Para la sobreyectividad, sea $D \in \mathcal{D}_p(M)$, $(U, \phi) = (U, x_1, x_2, ..., x_n)$ una carta con $p \in U$ y $f \in C_p^\infty(U)$. Definamos $g = f \circ \phi^{-1}$. Restringiendo a dominios adecuados en caso necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V = \phi(U)$ es una vecindad convexa de 0 en $\mathbb{R}^n$ y $\phi(p) = 0$. Por el lema anterior tenemos que

$$g(q) = g(0) + \sum_{i=1}^n r_i(q) h_i(q)$$

con $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$ y $h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial r_i}(0)$. Ahora, si $q = \phi(s)$, podemos escribir esto como

$$\begin{aligned}f(s) &= f(p) + \sum_{i=1}^n r_i(\phi(s)) h_i(\phi(s)) \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^n r_i(\phi(s))(h_i \circ \phi)(s)\end{aligned}$$

de modo que la función f con variable independiente s se define por

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (r_i \circ \phi)(h_i \circ \phi)$$

con $(h_i \circ \phi)(p) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{r_i}(0)$. Luego, usando que $D(f(p)) = 0$ (pues $f(p)$ es constante), la regla de Leibniz y que $x_i(p) = r_i(\phi(p)) = r_i(0) = 0$, tenemos que al aplicar D en ambos lados

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{i=1}^{n} D(x_i)(h_i \circ \phi)(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p) D(h_i \circ \phi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r_i}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f. \end{aligned}$$

Por lo tanto $D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$. Haciendo $D = D_v$, con

$$v = \begin{bmatrix} D(x_i) \\ D(x_2) \\ \vdots \\ D(x_n) \end{bmatrix}$$

queda probada la sobreyectividad. Finalmente probemos la inyectividad, supongamos que $D_v = 0$ para $v \in \mathbb{R}^n$. Aplicando D_v a la función coordenada x_j se obtiene

$$0 = D_v(x_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p x_j = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_i^j = v_j$$

por tanto, $v = 0$ y Θ es un isomorfismo.

$\square$

Notemos que si Θ es la transformación lineal de la proposición anterior, entonces $\Theta^{-1} : \mathcal{D}_p(M) \to \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\Theta^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \Big) = v \quad \text{con} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

El teorema anterior nos permite pensar en el espacio tangente T_pM como si fuera $\mathbb{R}^n$, pues son isomorfos. La idea es la siguiente: como toda variedad diferenciable es indistinguible a $\mathbb{R}^n$ en vecindades muy pequeñas, y a su vez $\mathbb{R}^n$ es una variedad y un espacio lineal isomorfo a T_pM, entonces podemos pensar a T_pM como si fuera él mismo aquella porción pequeña de la variedad. La Figura 1.3 ilustra esto para el caso de la esfera S^2. En algunos textos, se suelen dibujar los espacios tangentes T_pM “pegados” a M, como en la Figura 1.4, donde $M = S^2$.

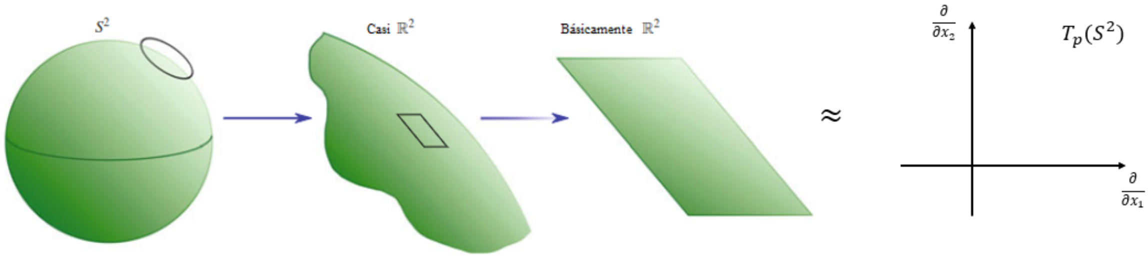

Figura 1.3: Una pequeña porción de la esfera S^2, es indistinguible a $\mathbb{R}^2$, y al ser $\mathbb{R}^2$ isomorfo a T_pS^2, podemos considerar a T_pS^2 como si fuera $\mathbb{R}^2$ cambiando simplemente a las bases $\{e_1, e_2\}$ por $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$.

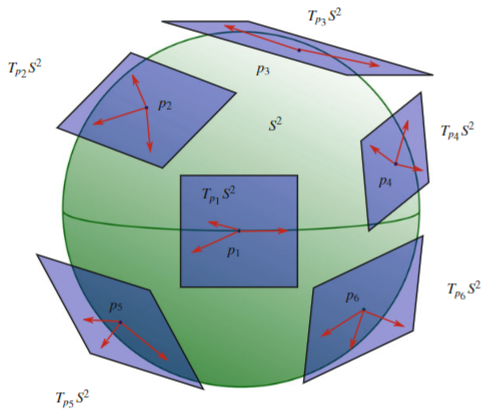

Figura 1.4: Se muestran los espacios tangentes "pegados" a S^2.

Con lo desarrollado anteriormente, podemos introducir el concepto de $diferencial$. En algunos textos en inglés, a la diferencial se le suele llamar "$pushforward$". La diferencial de una función es la generalización del concepto de derivada que aprendemos en cálculo, y lo que representa es lo mismo, es decir, es la función lineal que mejor se aproxima a la función original en vecindades muy pequeñas.

Definición 1.2.5. Sea $f : N \to M$ una función C^∞ entre dos variedades. Para cada $p \in N$, la función f induce una transformación lineal llamada $diferencial\ de\ f\ en\ p$

$$f_* : T_pN \to T_{f(p)}M$$

definida por

$$(f_*(X_p))g = X_p(g \circ f) \in \mathbb{R}$$

para $X_p \in T_pN$ y $g \in C^\infty_{f(p)}(M)$.

En $\mathbb{R}^n$ tenemos una forma canónica o natural de identificar todos los espacios tangentes $T_p\mathbb{R}^n$ en uno solo mediante traslaciones. Dicho de manera más detallada; al ser $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, podemos identificar como su origen al vector cero $\bar{0}$. Luego, cada vector del espacio tangente

$T_p\mathbb{R}^n$ puede ser "transportado de manera paralela" para hacerlo coincidir con el origen de $\mathbb{R}^n$, consiguiendo así identificar a $T_p\mathbb{R}^n$ con $T_{\bar{0}}\mathbb{R}^n$ (justo en esto se basa la noción de "vector libre" que se enuncia en muchos libros). De esta forma, para sumar dos vectores $v \in T_p\mathbb{R}^n$ y $w \in T_q\mathbb{R}^n$ de dos espacios tangentes distintos, lo que hacemos simplemente es "transportarlos de manera paralela" al origen, y una vez ahí proceder a sumarlos como si fueran vectores de $T_{\bar{0}}\mathbb{R}^n$ (o mejor aún, como si fueran vectores de $\mathbb{R}^n$, tal como lo hacen la mayoría de libros de cálculo diferencial, pues $\mathbb{R}^n \cong T_{\bar{0}}\mathbb{R}^n$). Es por eso que al desarrollar el cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$ ni siquiera se plantea la posibilidad de considerar espacios tangentes distintos en puntos distintos, pues todos pueden ser identificados a uno solo. Entonces surge la pregunta de si lo anterior puede hacerse en general para cualquier variedad diferenciable, y la respuesta es que no. En una variedad diferenciable (distinta a $\mathbb{R}^n$), para comparar dos vectores asociados a espacios tangentes distintos, debemos apoyarnos del concepto de *conexión afín.* La noción de conexión afín se introdujo para remediar este problema, pues su propósito es "conectar" espacios tangentes cercanos. La conexión afín es quien determina como es que debe hacerse el "transporte paralelo" de vectores tangentes sobre una variedad, ya que no es tan sencillo como en $\mathbb{R}^n$, pues la variedad podría tener "curvatura". En el espacio $\mathbb{R}^n$ es sencillo entender el concepto de "paralelismo", sin embargo la cuestión se vuelve complicada sobre otras variedades. Las frases y palabras escritas entre comillas en la explicación anterior son formalizadas a partir del concepto de conexión afín. Dicho concepto es uno de los más importantes en el estudio de la Geometría Riemanniana, y aunque no lo abordaremos en el presente texto, vale la pena conocer su motivación.

Sabemos por álgebra lineal, que a un espacio vectorial V podemos asociarle su espacio dual V^*. Lo que nos interesará en esta sección es estudiar al espacio dual de T_pM que denotaremos por T_p^*M. Este análisis es fundamental para entender las formas diferenciales.

Definición 1.2.6. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es C^∞, su *diferencial* es la función $df : T_pM \to \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ y $X_p \in T_pM$,

$$(df)_p(X_p) = X_pf.$$

Anteriormente dimos otra definición para el diferencial de una función, denotada por f_*. Comparemos ambas nociones.

Proposición 1.2.0.4. *Si $f : M \to \mathbb{R}$ es C^∞, entonces para $p \in M$ y para todo $X_p \in T_pM$,*

$$f_*(X_p) = (df)_p(X_p)\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)}.$$

Demostración. Como $f_*(X_p) \in T_{f(p)}\mathbb{R}$, existe un numero real a tal que

$$f_*(X_p) = a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)}$$

al evaluar la identidad $I_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I_\mathbb{R}(t) = t$, en ambos lados obtenemos: del lado izquierdo $f_*(X_p)I_\mathbb{R} = X_p(I_\mathbb{R} \circ f) = X_pf = (df)_p(X_p)$. Del lado derecho

$$a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} I_\mathbb{R} = a\frac{dt}{dt} = a$$

por tanto

$$(df)_p(X_p) = a.$$

en consecuencia $f_*(X_p) = a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} = (df)_p(X_p)\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)}$.

□

Esta proposición prueba que bajo el isomorfismo (1.3) $\Theta : \mathbb{R} \to T_{f(p)}\mathbb{R}$, df es lo mismo que f_*, pues

$$\begin{aligned}\Theta((df)_p(X_p)) &= \Theta(a)\\ &= a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)}\\ &= f_*(X_p)\end{aligned}$$

Esta el la razón por la cual llamamos a df y a f_* de la misma manera.

Teorema 1.2.1. *Sea $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$ una carta de M. En cada punto $p \in U$, las diferenciales $(dx_1)_p, (dx_2)_p, ..., (dx_n)_p$ son una base para el espacio dual T_p^*M.*

Demostración. Tenemos que

$$(dx_i)_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p x_i = \delta_j^i$$

por lo tanto $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, ..., (dx_n)_p\}$ son una base para el espacio dual T_p^*M. □

Por el teorema anterior, todo elemento $\omega \in T_p^*M$ en U puede ser escrito como una combinación lineal

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

En particular, si $f : M \to \mathbb{R}$ es C^∞, entonces la restricción de la diferencial df a U debe ser la combinación lineal

$$df = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i.$$

Para hallar a_j evaluamos en ambos lados en $\frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$(df)\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_j^i = a_j$$

y por lo tanto,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.5}$$

1.3. Homotopías diferenciables

Definición 1.3.1. Sean M y N dos variedades. Dos funciones C^∞, $f, g : M \to N$ son *homotópicas diferenciablemente* si existe una función C^∞

$$F : M \times \mathbb{R} \to N$$

tal que

$$F(x,0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F(x,1) = g(x)$$

para todo $x \in M$; la función F se llama homotopía de f a g.

Es útil pensar al parámetro t como el tiempo y a la homotopía F como una función que determina como la función f se transforma en g. Si f y g son homotópicas diferenciablemente lo indicaremos con la notación $f \sim g$.

Ejemplo 1.3.1. *Homotopía lineal.*

Sean f y g funciones C^∞ de una variedad M a $\mathbb{R}$. Definamos $F : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x)) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

donde claramente $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$, ademas de que F es C^∞. Por tanto $f \sim g$. En este caso, lo que hace F es unir a $f(x)$ con $g(x)$ mediante un segmento de recta.

Proposición 1.3.0.1. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia.*

Demostración. Toda función es homotópica a sí misma mediante la homotopía trivial $F(x,t) = f(x)$, de modo que se cumple el ser reflexiva. Por otra parte, si $f \sim g$, entonces existe una homotopía $F(x,t)$ tal que es C^∞, $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. Una homotopía de g a f está dada por $H(x,t) = F(x, 1-t)$ (note que la homotopía H es la misma F solo que recorriendo el tiempo en sentido opuesto), y por tanto se cumple la reflexividad. Finalmente, si F es una homotopía de f a g, y G es una homotopía de g a h, definimos la homotopía H de f a h por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } t < 0, \\ F(x,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ G(x,t) & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

con la condición de que F y G pertenezcan al mismo germen en $(x, 1/2)$. Así en consecuencia, se cumple la transitividad y por tanto se trata de una relación de equivalencia. $\square$

Definición 1.3.2. Dos variedades M y N tienen el mismo tipo de homotopía, si existe un par de funciones $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $g \circ f \sim I_M$ y $f \circ g \sim I_N$. En este caso f y g se dicen inversas homotópicas.

Definición 1.3.3. Una variedad es *contráctil* si tiene el mismo tipo de homotopía a un punto.

Ejemplo 1.3.2. *El espacio $\mathbb{R}^n$ es contráctil.*

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $i : \{p\} \to \mathbb{R}^n$ la función inclusión, y $r : \mathbb{R}^n \to \{p\}$ la función constante. Entonces $r \circ i = I_{\{p\}}$, la función identidad en $\{p\}$. La homotopía lineal es una homotopía entre la función constante $i \circ r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $I_{\mathbb{R}^n}$:

$$F(x,t) = (1-t)x + tr(x) = (1-t)x + tp$$

Por tanto, el espacio $\mathbb{R}^n$ y el conjunto $\{p\}$ tienen el mismo tipo de homotopía, y en consecuencia $\mathbb{R}^n$ es contráctil.

Definición 1.3.4. Sean S una subvariedad de M, con $i : S \to M$ la función inclusión. Una *retracción* de M a S es una función $r : M \to S$ que, restricta a S, es la identidad. En otras palabras, $r \circ i = I_S$.

Definición 1.3.5. Sea S una subvariedad de M, una *retracción por deformación* de M sobre S es una función $F : M \times \mathbb{R} \to M$ tal que para todo $x \in M$,

(i) $F(x,0) = x$,

(ii) existe una retracción $r : M \to S$ tal que $F(x,1) = r(x)$,

(iii) para todo $s \in S$ y $t \in \mathbb{R}$, $F(s,t) = s$.

En este caso, diremos que S es un retracto por deformación de M.

Proposición 1.3.0.2. *Si S es un retracto por deformación de M, entonces S y M tienen el mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Sea $F : M \times \mathbb{R} \to M$ una retracción por deformación de M a S donde $f_1(x) = F(x,1) = r(x)$ es la retracción de M sobre S. Como r es retracción, la composición $r \circ i$ coincide con I_S. Además, por definición de retracción, $r \circ i$ es f_1 y la retracción por deformación da la homotopía

$$f_1 = i \circ r \sim f_0 = I_M$$

por lo tanto, $r : M \to S$ y $i : S \to M$ son inversas homotópicas. □

Capítulo 2

Fibrados vectoriales

Las definiciones y los resultados principales de este capítulo son obtenidos de [4, Cap 10], [7, Cap 3].

2.1. Fibrado tangente

En topología existe el concepto de *fibrado* o *espacio fibrado*. Un caso particular de fibrado es el *fibrado vectorial* de una variedad diferenciable, que es de lo que nos ocuparemos en esta sección. La idea es asociar a cada punto $p \in M$ de la variedad diferenciable un espacio vectorial (por ejemplo, el espacio tangente T_pM) y después "unir" a todos los espacios vectoriales de tal forma que obtengamos a otra variedad diferenciable. Una vez logrado esto, el fibrado vectorial nos permitirá definir conceptos sobre nuestra variedad original, tales como los campos vectoriales o las formas diferenciales.

Definición 2.1.1. Si M es una variedad diferenciable, definimos el *fibrado tangente* de M, denotado por TM, como la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM \tag{2.1}$$

donde un elemento de esta unión disjunta es, por definición, el par ordenado (p, X_p), donde $p \in M$ y $X_p \in T_pM$. Además, definimos la función proyección $\pi : TM \to M$ por $\pi(p, X_p) = p$. Finalmente, llamamos *fibra en* p al conjunto $\pi^{-1}(p)$.

Es imposible imaginar cómo se visualiza el fibrado tangente, sin embargo más adelante expondremos una forma útil de representarlo.

Teorema 2.1.1. *Para toda variedad diferenciable M de dimensión n, el fibrado tangente TM tiene una topología y una estructura diferenciable que la vuelven una variedad diferenciable de dimension $2n$. Con respecto a esta estructura, la proyección $\pi : TM \to M$ es C^∞.*

Demostración. Comenzaremos por definir a las funciones que conformarán las cartas de TM. Dada una carta (U, ϕ) de M, podemos escribir $\phi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$. De esta manera definamos $\overline{\phi} : \pi^{-1}(U) \subseteq TM \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\overline{\phi}\Big(p, X_p\Big) = (\phi(p), v_1, v_2, ..., v_n) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p), v_1, v_2, ..., v_n) \quad \text{con} \quad X_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

La imagen del dominio de $\overline{\phi}$ es $\overline{\phi}(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, el cual es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Notemos que $\overline{\phi}$ es una biyección sobre su imagen, pues si $\phi(p) = q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$, su inversa puede ser escrita como

$$(q, v_1, v_2, ..., v_n) = (q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n) \mapsto \Big(\phi^{-1}(q), X_{\phi^{-1}(q)}\Big) = (p, X_p).$$

De esta forma, a partir de la carta (U, ϕ) de M, obtenemos $(\pi^{-1}(U), \overline{\phi})$. Probaremos que $(\pi^{-1}(U), \overline{\phi})$ es una carta de TM. Para esto sean (U, ϕ), (V, ψ) dos cartas para M, y $(\pi^{-1}(U), \overline{\phi})$, $(\pi^{-1}(V)\overline{\psi})$ las respectivas cartas para TM. Así, los conjuntos

$$\overline{\phi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \overline{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

son ambos abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$. Probemos que las funciones de cambio de coordenadas $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ son difeomorfismos. Para ello, notemos que si $(U, \phi) = (U, x_1, x_2, ..., x_n)$, $(V, \psi) = (V, y_1, y_2, ..., y_n)$ son dos cartas para M, entonces para todo $p \in U \cap V$, existen dos bases para T_pM, que serían $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y_2}\big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\big|_p\}$. Así. todo vector $X_p \in T_pM$ se puede escribir como

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p.$$

Podemos comparar ambas representaciones. Aplicando x_k en ambos lados

$$a_k = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\Big) x_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p\Big) x_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial x_k}{\partial y_i}(p).$$

Similarmente, aplicamndo y_k en ambos lados,

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(p). \tag{2.2}$$

De este modo, el cambio de coordenadas $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ está dado por

$$(\phi(p), a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto ((\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)), b_1, b_2, ..., b_n)$$

donde los b_i están dados por (2.2). De está forma, $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1}$ es C^∞, y de forma análoga $\overline{\phi} \circ \overline{\psi}^{-1}$.

Al escoger una cubierta $\{U_i\}$ numerable para M, obtenemos una cubierta numerable $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ para TM que satisfacen las condiciones (i)-(iv) de la proposición 1.1.1.1. Para la condición de ser de Hausdorff (v), simplemente notemos que dos puntos que estén en la misma fibra de π, están en la misma carta; mientras que si (p, X) y (q, Y) están en fibras diferentes, existen dos abiertos disjuntos U_i, U_j de M tales que $p \in U_i$ y $q \in U_j$, y los conjuntos $\pi^{-1}(U_i)$ y $\pi^{-1}(U_j)$ son disjuntos, cumpliendo que $(p, X) \in \pi^{-1}(U_i)$ y que $(q, Y) \in \pi^{-1}(U_i)$.

Finalmente, para ver que π es diferenciable, simplemente notemos que su representación con respecto a las cartas (U, ϕ) para M y $(\pi^{-1}(U), \overline{\phi})$ para TM es $\pi(p, v) = p$.

$\square$

Una representación gráfica muy útil del fibrado tangente es la de dibujar a la variedad M como una variedad de dimensión 1. Luego, los espacios tangentes T_pM se dibujan como rectas perpendiculares a M que intersectan en el respectivo punto p. Cada punto de la recta T_pM será en consecuencia un vector tangente a T_pM (Figura 2.1).

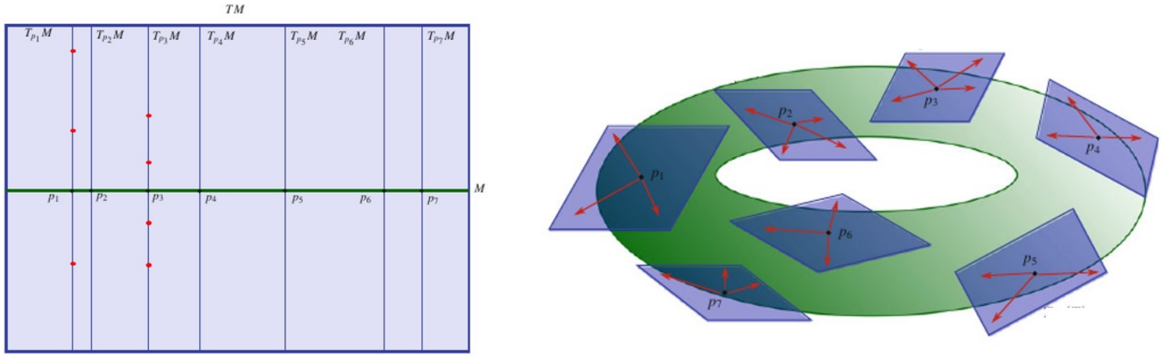

Figura 2.1: Del lado izquierdo se muestra TM con 7 espacios tangentes. Los puntos rojos corresponden a los respectivos vectores tangentes de la variedad M. En la parte derecha se visualizan esos 7 espacios tangentes sobre la variedad con los respectivos vectores tangentes.

De manera análoga al fibrado tangente, podemos definir al *fibrado cotangente* como

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

y a la función proyección $\pi : T^*M \to M$ por $\pi(p, \alpha) = p$ si $\alpha \in T_p^*M$. De esta manera, T^*M también es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y π es de clase C^∞. Para probarlo se procede de manera análoga a la demostración del teorema 2.1.1.

Por otra parte, notemos que si consideramos una función continua $X : M \to TM$, lo que realmente estamos definiendo sobre la variedad es un campo vectorial; es decir, una función que asigna a cada punto p de la variedad un vector de T_pM. En adición, una *sección* es una función $s : M \to TM$ que cumple que $\pi \circ s = I_M$, la función identidad sobre M. Decimos que la sección es diferenciable si es una función diferenciable entre las variedades M y TM (Figura 2.2).

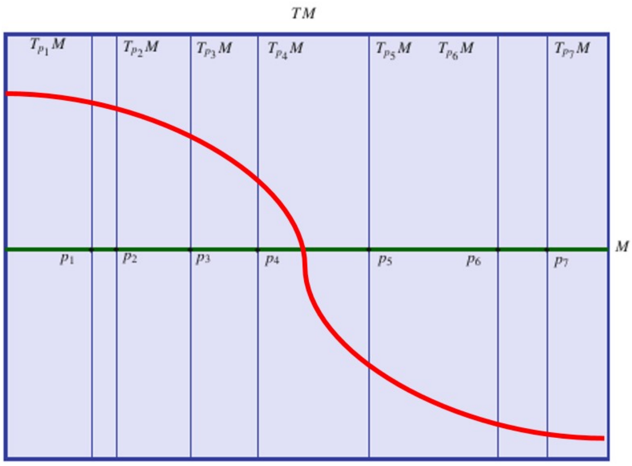

Figura 2.2: La sección s pintada en rojo determina en la variedad un campo vectorial.

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.2. Un *campo vectorial diferenciable* X sobre una variedad M es una sección diferenciable $X : M \to TM$.

2.2. Fibrados vectoriales

La unión de espacios vectoriales que hemos expuesto en la sección anterior es un ejemplo particular de lo que se llama *fibrado vectorial* o también *haz vectorial*. La definición formal es la siguiente.

Definición 2.2.1. Sea M una variedad diferenciable. Un *fibrado vectorial diferenciable de rango k* es una terna (E, M, π) que consta de un par de variedades diferenciables E (llamada el *espacio total*) y M (llamada *base*), junto con una función sobreyectiva (la proyección) y diferenciable $\pi : E \to M$ que cumple lo siguiente:

i) Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (llamado *fibra* de E sobre p) tiene estructura de espacio vectorial.

ii) Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p en M y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (llamado *trivialización local* de E) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

iii) La restricción de Φ a E_p es un isomorfismo de E_p a $\mathbb{R}^k$, esto es, $\Phi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo.

La figura 2.3 muestra una representación visual útil para un fibrado vectorial.

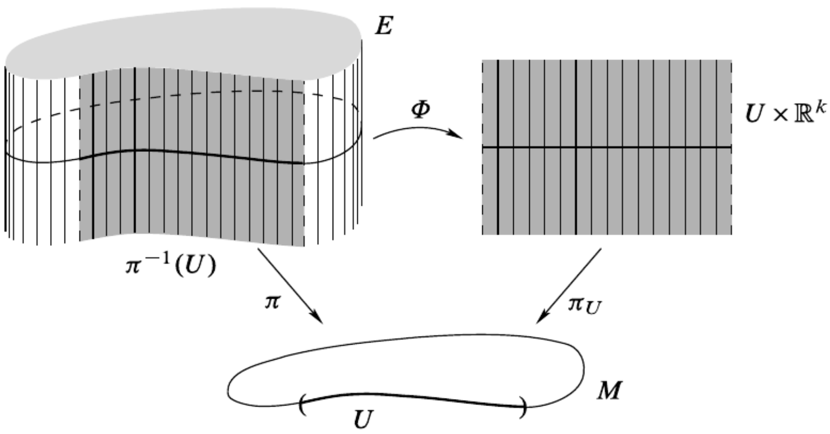

Figura 2.3: Representación de un fibrado vectorial.

Como podemos observar, la representación del fibrado vectorial es análoga al del fibrado tangente de la figura 2.1. De hecho, un ejemplo de un fibrado vectorial es justamente el fibrado tangente. Así, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.0.1. *Una variedad M de dimensión n con su respectivo fibrado tangente TM y la función proyección $\pi : TM \to M$ definidos como en en el Teorema 2.1.1, constituyen un fibrado vectorial diferenciable de rango n.*

Demostración. El punto $i)$ se cumple, pues $\pi^{-1}(p) = T_pM$. Para probar $ii)$, consideremos cualquier carta $(U, \phi) = (U, x_1, x_2, ..., x_n)$ de M, y definamos la función $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi\Big(p, \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big) = (p, (v_1, v_2, ..., v_n)).$$

Así definida, notemos que la composición

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi \times I_{\mathbb{R}^n}} \phi(U) \times \mathbb{R}^n$$

es igual al difeomorfismo $\overline{\phi}$ del teorema 2.1.1, es decir, $\overline{\phi} = (\phi \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ \Phi$. Como $\overline{\phi}$ y $\phi \times I_{\mathbb{R}^n}$ son difeomorfismos, entonces Φ también lo es. Además, se cumple que $\pi_1 \circ \Phi = \pi$. Finalmente, para probar $iii)$ observemos que cuando Φ se restringe a alguna fibra T_pM, se cumple que $\Phi = \Theta^{-1}$, donde Θ es el isomorfismo de la proposición 1.2.0.3.

□

De forma análoga a la demostración anterior, se puede mostrar que (T^*M, M, π) también es un fibrado vectorial.

Con frecuencia sucede que se nos da una colección de espacios vectoriales arbitrarios, uno para cada punto de una variedad, que nos gustaría "unir" para formar un fibrado vectorial. Entonces surge la pregunta, ¿Existe una forma de probar que dicha colección de espacios vectoriales forman un espacio total para un fibrado tangente sin la necesidad de construir una estructura de variedad diferenciable para ellos?. Como muestra el siguiente teorema, todo lo que necesitamos hacer es exhibir las funciones que queremos considerar como trivializaciones locales y comprobar que se superponen correctamente. Pero antes de mostrar el teorema, introduzcamos una variedad que nos será de utilidad, llamada *grupo lineal general*. Usaremos la notación $\det A$ o $|A|$ para denotar al determinante de la matriz A.

Lema 2.2.0.1. *El grupo general lineal de orden n, definido por $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid |A| \neq 0\}$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2.*

Demostración. Sabemos que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, por tanto damos a $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la topología de $\mathbb{R}^{n^2}$ inducida por tal isomorfismo. Como la función determinante

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

es continua (es un polinomio en las entradas de la matriz), $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es un subconjunto abierto de $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ y es por lo tanto una variedad diferenciable de dimensión n^2. □

Lema 2.2.0.2. *Sea (E, M, π) un fibrado vectorial de rango k. Supongamos que $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ y $\Psi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$ son 2 trivializaciones locales de E con $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe una función diferenciable $\tau : U \cap V \to GL(k, \mathbb{R})$ tal que la composición $\Phi \circ \Psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$ es de la forma*

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v),$$

donde $\tau(p)$ es una matriz de tamaño $k \times k$.

Demostración. Tenemos que $\pi_1 \circ (\Phi \circ \Psi^{-1}) = \pi$, lo que significa que

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, v) = (p, \eta(p, v))$$

para alguna función diferenciable $\eta : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Más aún, para cada punto fijo $p \in U \cap V$, la función $v \mapsto \eta(p, v)$ de $\mathbb{R}^k$ a sí misma es una tranformación lineal invertible, de modo que existe una matriz invertible $\tau(p)$ de tamaño $k \times k$ tal que $\eta(p, v) = \tau(p)v$ y satisface lo requerido. □

Teorema 2.2.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, supongamos que para cada $p \in M$ tenemos un espacio vectorial E_p de dimensión k fija. Sea $E = \coprod_{p \in M} E_p$ la unión disjunta de esos espacios y $\pi : E \to M$ definida por $\pi(p, E_p) = p$. Supongamos además que contamos con lo siguiente:*

i) una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M.

ii) para cada $\alpha \in A$, una función biyectiva $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$.

iii) para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, una función diferenciable $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ tal que la función $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ tiene la forma

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v). \tag{2.3}$$

Entonces E tiene una topología única y una estructura diferenciable que lo vuelven una variedad diferenciable. Más aún, (E, M, π) es un fibrado vectorial diferenciable de rango k.

Demostración. Para cada $p \in M$, tomemos U_α que contiene a p, y (V_p, ϕ_p) para M tal que $p \in V_p \subseteq U_\alpha$. Definamos $\overline{\phi}_p : \pi^{-1}(V_p) \to \phi_p(V_p) \times \mathbb{R}^k$ por $\overline{\phi}_p = (\phi_p \times I_{\mathbb{R}^k}) \circ \Phi_\alpha$

$$\pi^{-1}(V_p) \xrightarrow{\Phi_\alpha} V_p \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\phi_p \times I_{\mathbb{R}^k}} \phi(V_p) \times \mathbb{R}^k. \tag{2.4}$$

Probaremos que el conjunto $\{(\pi^{-1}(V_p), \overline{\phi}_p) \mid p \in M\}$ satisface las condiciones del la proposición 1.2.1.1, probando así que es una estructura diferenciable única para E.

Como $\overline{\phi}_p$ es la composición de funciones biyectivas, $\overline{\phi}_p$ es biyectiva en un conjunto abierto o en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Para cualesquiera $p, q \in M$, observemos que

$$\overline{\phi}_p \circ \overline{\phi}_q^{-1} = (\phi_p \times I_{\mathbb{R}^k}) \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ (\phi_q \times I_{\mathbb{R}^k})^{-1}.$$

Como $\phi_p \times I_{\mathbb{R}^k}$, $\phi_q \times I_{\mathbb{R}^k}$ y $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ son difeomorfismos, su composición es un difeomorfismo. Por lo tanto se satisfacen las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) de la proposición 1.1.1.1. Por otro lado, como la cubierta $\{V_p \mid p \in M\}$ tiene una subcubierta numerable, *iv*) tambien se cumple. Para checar la condición *v*), notemos que dos puntos cualesquiera en el mismo espacio E_p están en alguna de las cartas que hemos construido; mientras que si $v \in E_p$ y $u \in E_q$ con $p \neq q$, podemos tomar los abiertos V_p y V_q disjuntos, de modo que los conjuntos $\pi^{-1}(V_p)$ y $\pi^{-1}(V_q)$ son disjuntos, conteniendo a v y u respectivamente. Por lo tanto, E es una variedad diferenciable.

Probemos ahora que (E, M, π) es un fibrado vectorial diferenciable de rango k. Con respecto a esta estructura, cada función Φ_α es un difeomorfismo, porque en términos de las cartas $(\pi^{-1}(V_p), \overline{\phi}_p)$ para E y $(V_p \times \mathbb{R}^k, \phi_p \times I_{\mathbb{R}^k})$ para $V_p \times \mathbb{R}^k$, la representación de Φ_α en coordenadas locales es la función identidad. La representación en coordenadas lo cales de π, con respecto a la misma carta para E y la carta (V_p, ϕ_p) para M, es $\pi(x, v) = x$, entonces π es diferenciable.

Como cada Φ_α manda E_p sobre $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, es inmediato que $\pi_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$, y Φ_α es lineal sobre las fibras por hipótesis. Por lo tanto Φ_α es una trivialización local.

El hecho de que esta sea la única estructura diferenciable se sigue por el requerimiento de que Φ_α sean difeomorfismos sobre su imagen: cualquier otra estructura diferenciable que satisfaga las mismas condiciones debe incluir todas las cartas que construimos en la prueba, de modo que debe ser esta misma estructura. □

Teorema 2.2.2. *Dados dos fibrados vectoriales diferenciables* (E', M, π') *y* (E'', M, π'') *de rango* k' *y* k'' *respectivamente, existe un nuevo fibrado vectorial* (E, M, π) *de rango* $k' + k''$*, cuya fibra en el punto* $p \in M$ *es la suma directa* $E'_p \bigoplus E''_p$*. El espacio total sería* $E = E' \bigoplus E'' = \coprod_{p \in M}(E'_p \bigoplus E''_p)$*, con la respectiva proyección* $\pi : E \to M$*.*

Demostración. Para cada $p \in M$ tomamos una vecindad U de p lo suficientemente pequeña de tal forma que existan las trivializaciones locales $(\pi'^{-1}(U), \Phi')$ de E' y $(\pi''^{-1}(U), \Phi'')$ de E'', y definimos $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{k'+k''}$ mediante

$$\Phi(v', v'') = \Big(\pi'(v'), \big(\pi_{\mathbb{R}^{k'}} \circ \Phi'(v'), \pi_{\mathbb{R}^{k''}} \circ \Phi''(v'')\big)\Big).$$

Supongamos que hay otro par de trivializaciones $(\bar{\pi}'^{-1}(U), \bar{\Phi}')$ y $(\bar{\pi}''^{-1}(U), \bar{\Phi}'')$. Sean

$$\tau' : (\pi'^{-1}(U) \cap \bar{\pi}'^{-1}(U)) \to GL(k', \mathbb{R})$$

$$\tau'' : (\pi'^{-1}(U) \cap \bar{\pi}'^{-1}(U)) \to GL(k'', \mathbb{R})$$

las correspondientes funciones de transición. Entonces, la función de transición para $E' \bigoplus E''$ es de la forma

$$\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}\big(p, (v', v'')\big) = \big(p, \tau(p)(v', v'')\big),$$

donde $\tau(p) = \tau'(p) \oplus \tau''(p) \in GL(k' + k'', \mathbb{R})$ es la matriz de matrices diagonal

$$\begin{pmatrix} \tau'(p) & 0 \\ 0 & \tau''(p) \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz depende diferencialmente de p, se sigue del teorema 2.2.1 que (E, M, π) es un fibrado vectorial diferenciable de rango $k' + k''$. □

El fibrado que hemos construido en el teorema anterior se llama *suma de Whitney de* E' *y* E''. Notemos que podemos continuar recursivamente y definir la suma de Whitney de n fibrados vectoriales. Como consecuencia, tenemos los dos siguientes corolarios, cuya demostración es prácticamente inmediata.

Corolario 2.2.2.1. *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n*. Si denotamos por* $T^k_p M = T_pM \times \cdots \times T_pM$ *al producto cartesiano de* T_pM *consigo mismo* k *veces, entonces* (T^kM, M, π) *es un fibrado vectorial diferenciable de rango* $2kn$*, donde* T^kM *es el producto cartesiano de* TM *consigo mismo* k *veces.*

Demostración. Como (TM, M, π) es un fibrado vectorial, y además

$$T^kM \cong \bigoplus^k TM = \coprod_{p \in M} T^k_p M \cong \coprod_{p \in M} (\bigoplus T_pM),$$

por el teorema anterior, (T^kM, M, π) es un fibrado vectorial diferenciable de rango $2kn$. □

De manera análoga, se prueba el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2.2. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Si denotamos por $T_p^{*k}M = T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M$ al producto cartesiano de T_p^*M consigo mismo k veces, entonces $(T^{*k}M, M, \pi)$ es un fibrado vectorial diferenciable de rango $2kn$, donde $T^{*k}M$ es el producto cartesiano de T^*M consigo mismo k veces.*

2.3. Secciones diferenciables

Definición 2.3.1. Sea (E, M, π) un fibrado vectorial de rango k. Si $U \subset M$, una *sección local de* E sobre U, es una función continua $s : U \to E$ que satisface que $\pi \circ s = I_U$. Cuando $U = M$, a la función s la llamamos simplemente *sección de* E (a veces también *sección global de* E). En adición, si s es diferenciable como función entre variedades, diremos que la sección (local o global) es diferenciable.

Denotaremos por $\Gamma(E)$ al conjunto de todas las secciones diferenciables de E, y por $\Gamma(U, E)$ al conjunto de todas las secciones locales diferenciables de E sobre U. La figura 2.2 de la sección 2.1 sirve también como representación gráfica de una sección en un fibrado vectorial en general.

Proposición 2.3.0.1. *Sean $s, t \in \Gamma(U, E)$ y $f \in C^\infty(U)$. Entonces*

i) la suma $s + t : U \to E$ definida por

$$(s + t)(p) = s(p) + t(p) \in E_p,$$

es un elemento de $\Gamma(U, E)$.

ii) el producto $fs : U \to E$ definido por

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \in E_p$$

es un elemento de $\Gamma(U, E)$.

Demostración. i) Es claro que $(s + t)$ es una sección, pues $(s + t)(p) = s(p) + t(p) \in E_p$. Para probar que es diferenciable, fijemos $p \in U$ y sea $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ una trivialización. Supongamos que

$$(\Phi \circ s)(q) = (q, a_1(q), ..., a_r(q))$$

y

$$(\Phi \circ t)(q) = (q, b_1(q), ..., b_r(q))$$

para $q \in U$. Como s y t son diferenciables, a_i y b_i son elementos de $C^\infty(U)$. Como Φ es lineal en cada fibra,

$$(\Phi \circ (s + t))(q) = (q, a_1(q) + b_1(q), ..., a_r(q) + b_r(q))$$

esto prueba que s+t es diferenciable. Por lo tanto $(s + t) \in \Gamma(U, E)$.

ii) Es claro que $(s + t)$ es una sección, pues $(fs)(p) = f(p)s(p) \in E_p$. Para probar que es diferenciable, notemos que por la linealidad de Φ en cada fibra

$$(\Phi \circ (fs))(q) = (q, f(q)a_1(q), ..., f(q)a_r(q)),$$

esto prueba que fs es diferenciable. Por lo tanto $fs \in \Gamma(U, E)$. □

La proposición anterior prueba que $\Gamma(U, E)$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial y también un módulo izquierdo sobre el anillo $C^{\infty}(U)$. Por otro lado, es claro que todo lo mostrado anteriormente es válido para $\Gamma(E)$.

Definición 2.3.2. Un *sistema coordenado móvil* (en inglés *frame*) de un fibrado vectorial diferenciable (E, M, π) de rango k, es un conjunto de secciones diferenciables $\{s_1, ..., s_k\}$ tales que para cada $p \in M$, $\{s_1(p), ..., s_k(p)\}$ es una base para la fibra E_p.

Ejemplo 2.3.1. *Sistema coordenado móvil para el fibrado producto.*

Sea M una variedad y $\{e_1, ..., e_k\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definamos $\overline{e}_i : M \to M \times \mathbb{R}^k$ por $\overline{e}_i(p) = (p, e_i)$. Entonces $\{\overline{e}_i, ..., \overline{e}_k\}$ es un sistema coordenado móvil del fibrado producto.

Ejemplo 2.3.2. *Sistema coordenado móvil de una trivialización.*

Si $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ es una trivialización local, entonces Φ^{-1} lleva a $\{\overline{e}_i, ..., \overline{e}_k\}$ del fibrado producto a un sistema coordenado móvil diferenciable $\{t_1, ..., t_k\}$ para E sobre U:

$$t_i(p) = \Phi^{-1}(\overline{e}_i(p)) = \Phi^{-1}(p, e_i),$$

con $p \in U$. Llamamos a $\{t_1, ..., t_r\}$ sistema coordenado móvil de la trivialización Φ.

Lema 2.3.0.1. *Sean $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ una trivialización. y $t_1, ..., t_k$ un sistema coordenado móvil diferenciable sobre U. Entonces una sección $s = \sum_{i=1}^{k} b_i t_i$ de E sobre U es diferenciable si y solo si los coeficientes b_i relativos a $t_1, ..., t_k$ son diferenciables.*

Demostración. Supongamos que la sección

$$s = \sum_{i=1}^{k} b_i t_i$$

de E sobre U es diferenciable. Entonces $\Phi \circ s$ es diferenciable. Notemos que

$$(\Phi \circ s)(p) = \sum_{i=1}^{k} b_i(p)\Phi(t_i(p)) = \sum_{i=1}^{k} b_i(p)(p, e_i) = \Big(p, \sum_{i=1}^{k} b_i(p)e_i\Big).$$

Como $\Phi \circ s$ es diferenciable, todos los b_i son diferenciables.

La suficiencia es consecuencia inmediata de la proposición 2.3.0.1. $\square$

Capítulo 3

Tensores, formas diferenciales y la derivada exterior

Las definiciones y los resultados principales de este capítulo son obtenidos de [2, Cap 1], [4, Cap 12], [7, Cap 1], [6, Cap 4, Vol 1], [8, Cap 2].

3.1. Tensores

Definición 3.1.1. Denotemos por $V^k = V \times \cdots \times V$ el producto cartesiano del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V consigo mismo $k-$veces. Una función $f : V^k \to \mathbb{R}$ es un $k-tensor$ o tensor de grado k si es lineal en cada uno de sus k argumentos:

$$f(..., av + bw, ...) = af(..., v, ...) + bf(..., w, ...)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in V$. Denotamos por $L^k(V)$ al conjunto de todos los $k-tensores$ sobre el espacio vectorial V.

Ejemplos sencillos de $2-$tensores son el producto punto en $\mathbb{R}^n$, y la operación de producto cruz para vectores en $\mathbb{R}^3$. Por otra parte, es sencillo verificar que $L^k(V)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la operación usual de suma de funciones y producto de funciones por escalares.

Teorema 3.1.1. *Denotemos por S_k al grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, ..., k\}$. Sea $f \in L^k(V)$, $\sigma \in S_k$ y definimos la operación σf por*

$$\sigma f(v_1, v_2, ..., v_k) = f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(k)})$$

entonces, con la operación anterior, el grupo S_k actúa por la izquierda sobre $L^k(V)$.

Demostración. Si e es la permutación identidad, entonces $ef(v_{e(1)}, v_{e(2)}, ..., v_{e(k)}) = f(v_1, v_2, ..., v_k)$, de modo que $ef = f$. Por otra parte, sean $\sigma, \tau \in S_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma f)(v_1, v_2, ..., v_k) &= (\sigma f)(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, ..., v_{\tau(k)}) \\
&= (\sigma f)(w_1, w_2, ..., w_k) \qquad \text{haciendo } w_i = v_{\tau(i)} \\
&= f(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, ..., w_{\sigma(k)}) \\
&= f(v_{\tau(\sigma(1))}, v_{\tau(\sigma(2))}, ..., v_{\tau(\sigma(k))}) = f(v_{(\tau\sigma)(1)}, v_{(\tau\sigma)(2)}, ..., v_{(\tau\sigma)(k)}) \\
&= (\tau\sigma)f(v_1, v_2, ..., v_k)
\end{aligned}$$

de modo que $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma f)$. Por lo tanto, S_k actúa por la izquierda sobre $L^k(V)$. $\square$

Definición 3.1.2. Un $k-$tensor f es simétrico, si para todo $\sigma \in S_k$ se cumple que $\sigma f = f$. Por otro lado, f es alternante, si para todo $\sigma \in S_k$ se cumple que $\sigma f = (\text{sgn } \sigma) f$, donde sgn σ denota al signo de la permutación σ.

Si definimos $\Lambda^k(V) = \{f \in L^k(V) \mid f \text{ es alternante}\}$, resulta que $\Lambda^k(V)$ es un subespacio vectorial de $L^k(V)$. De aquí en adelante prestaremos especial atención a $\Lambda^k(V)$, por ello mostraremos que existe una forma de obtener un tensor alternante a partir de cualquier tensor de $L^k(V)$. Dado $f \in L^k(V)$, definamos

$$Af = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f$$

entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1.1. *Si $f \in L^k(V)$, entonces $Af \in \Lambda^k(V)$.*

Demostración. Si $\tau \in S_k$, entonces

$$\begin{aligned}
\tau(Af) &= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \tau(\sigma f) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)(\tau\sigma) f \\
&= (\text{sgn } \tau) \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \tau\sigma)(\tau\sigma) f \qquad \text{pues } (\text{sgn } \tau\sigma) = (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \sigma) \\
&= (\text{sgn } \tau) Af,
\end{aligned}$$

como la suma es para toda $\sigma \in S_k$, entonces lo es para $\tau\sigma$. □

Proposición 3.1.1.2. *Si $f \in \Lambda^k(V)$, entonces $Af = (k!)f$.*

Demostración. Como $f \in \Lambda^k(V)$, tenemos que $\sigma f = (\text{sgn } \sigma) f$, y $(\text{sgn } \sigma)$ es ± 1, de forma que

$$Af = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \sigma) f = (k!) f.$$

□

Definición 3.1.3. Sean $f \in L^k(V)$ y $g \in L^s(V)$. El producto tensorial de f y g, es un $(k + s)-$tensor denotado por $(f \otimes g)$, que se define como

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_{k+s}) = f(v_1, ..., v_k) g(_{k+1}, ..., v_{k+s}).$$

Como $f(v_1, ..., v_k)$ y $g(_{k+1}, ..., v_{k+s})$ son números reales, se sigue inmediatamente que el producto tensorial es conmutativo y asociativo para tres tensores de distinto grado. Hemos introducido el producto tensorial para definir en términos de él una operación entre tensores más interesante, llamada producto cuña.

Definición 3.1.4. Si $f \in \Lambda^k(V)$ y $g \in \Lambda^s(V)$, definimos el producto cuña de f y g como

$$f \wedge g = \frac{1}{k!s!} A(f \otimes g) \in \Lambda^{k+s}(V).$$

Más explícitamente, podemos escribir el producto cuña como

$$(f \wedge g)(v_1, ..., v_{k+s}) = \frac{1}{k!s!} \sum_{\sigma \in S_{k+s}} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+s)}).$$

Si $k = 0$, el elemento $f \in \Lambda^0(V)$ es simplemente una constante c. En este caso

$$c \wedge g = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} (\text{sgn } \sigma) c g(v_1, ..., v_s)$$

de modo que $c \wedge g = cg$ para $c \in \mathbb{R}$ y $g \in \Lambda^s(V)$.

La definición del producto cuña puede parecer extraña y poco natural, se ha introducido sin enunciar alguna motivación o propósito. Sin embargo, tiene una finalidad muy sencilla que será expuesta más adelante en esta sección. Por ahora, nos limitaremos a demostrar algunas de sus propiedades más importantes.

Proposición 3.1.1.3. *El producto cuña es anticonmutativo: si $f \in \Lambda^k(V)$ y $g \in \Lambda^l(V)$, entonces $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.*

Demostración. Definamos $\tau \in S_{k+l}$ como la siguiente permutación:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{pmatrix}$$

de este modo

$$\tau(1) = k+1, \dots, \tau(l+k) = k$$

entonces

$$\sigma(1) = \sigma\tau(l+1), \dots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k)$$
$$\sigma(k+1) = \sigma\tau(1), \dots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l).$$

Así, para $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$,

$$\begin{aligned} A(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l+k)}) g(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) \\ &= (\text{sgn } \tau) \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma\tau) g(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l)}) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \\ &= (\text{sgn } \tau) A(g \otimes f)(v_1, \dots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce del hecho de que, mientras σ recorre todas las permutaciones en S_{k+l}, también lo hace $\sigma\tau$. Hemos demostrado

$$A(f \otimes g) = (\text{sgn } \tau) A(g \otimes f),$$

dividiendo entre $k!\ l!$ obtenemos

$$f \wedge g = (\text{sgn } \tau) g \wedge f$$

y por las propiedades de las permutaciones tenemos que $(\text{sgn } \tau) = (-1)^{kl}$. Por tanto

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f.$$

$\square$

Corolario 3.1.1.1. *Si $f \in L^k(V)$ con k impar, entonces $f \wedge f = 0$.*

Demostración. Por anticonmutatividad,

$$f \wedge f = (-1)^{k^2} f \wedge f = -f \wedge f,$$

ya que k es impar. Por lo tanto, $2f \wedge f = 0$. Dividiendo entre 2 se tiene $f \wedge f = 0$. $\square$

Lema 3.1.1.1. *Sea $f \in L^k(V)$ y $g \in L^l(V)$. Entonces*

i) $A(A(f) \otimes g) = k!A(f \otimes g)$

ii) $A(f \otimes A(g)) = l!A(f \otimes g)$

Demostración. *i*) Por definición

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma)\sigma\Big(\sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \tau)(\tau f) \otimes g\Big).$$

Podemos ver a $\tau \in S_k$ también como una permutación en S_{k+l} fijando $k+1, ..., k+l$. Visto de esta manera, τ cumple

$$(\tau f) \otimes g = \tau(f \otimes g).$$

Por tanto

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{\tau \in S_k} (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau)(\sigma\tau)(f \otimes g).$$

Para cada $\mu \in S_{k+l}$ y cada $\tau \in S_k$, existe un elemento único $\sigma = \mu\tau^{-1} \in S_{k+l}$ tal que $\mu = \sigma\tau$, por lo tanto cada $\mu \in S_{k+l}$ aparece una vez en la suma doble anterior por cada $\tau \in S_k$, y por lo tanto $k!$ veces en total. Así, la suma doble se puede reescribir como

$$A(A(f) \otimes g) = k! \sum_{\mu \in S_{k+l}} (\text{sgn } \mu)\mu(f \otimes g) = k!A(f \otimes g).$$

La igualdad *ii*) se prueba de manera análoga a *i*). $\square$

Proposición 3.1.1.4. *El producto cuña es asociativo: si $f \in \Lambda^k(V)$, $g \in \Lambda^l(V)$ y $h \in \Lambda^m(V)$, entonces*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Demostración. Por definición de producto cuña

$$\begin{aligned}
(f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{(k+l)!m!} A((f \wedge g \otimes h) \\
&= \frac{1}{(k+l)!m!} \frac{1}{k!l!} A(A(f \otimes g) \otimes h) \\
&= \frac{(k+l)!}{(k+l)!m!k!l!} A((f \otimes g) \otimes h) \qquad \text{por el lema anterior} \\
&= \frac{1}{k!l!m!} A((f \otimes g) \otimes h).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
f \wedge (g \wedge h) &= \frac{1}{k!(l+m)!} A\Big(f \otimes \frac{1}{l!m!} A(g \otimes h)\Big) \\
&= \frac{1}{k!l!m!} A((f \otimes g) \otimes h).
\end{aligned}$$

Por tanto $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$. $\square$

En vista de la proposición anterior podemos omitir los paréntesis y escribir simplemente $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge g \wedge h$, de modo que

$$f \wedge g \wedge h = \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h).$$

De hecho, podemos hacer la siguiente generalización: si $f_i \in \Lambda^{r_i}(V)$, entonces

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k = \frac{1}{(r_1)! \ldots (r_k)!} A(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r).$$

Teorema 3.1.2. *(Producto cuña para transformaciones lineales) Si $T_1, \ldots T_k \in L(V) = \Lambda^1(V)$ y $v_1, \ldots, v_k \in V$, entonces*

$$(T_1 \wedge \cdots \wedge T_k)(v_1, \ldots v_k) = det\ [T_i(v_j)],$$

donde $[T_i(v_j)]$ es la matriz cuyas filas están dadas por i y columnas por j.

Demostración.

$$\begin{aligned}(T_1 \wedge \cdots \wedge T_k)(v_1, \ldots v_k) &= A(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) T_1(v_{\sigma(1)}) \ldots T_k(v_{\sigma(k)}) \\ &= det[T_i(v_j)].\end{aligned}$$

□

Como sabemos, el determinante de una matriz se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo formado por los j vectores columnas de la matriz.

Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para V, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una base para el espacio dual V^*. Para el multi índice

$$I = (i_1, \ldots, i_k)$$

con $i_j \in \mathbb{N}$, escribimos e_I para denotar $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, y α_I para $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$. Por otro lado, un $k-$tensor, al igual que una transformación lineal, queda completamente determinado por las imágenes de los vectores base. Por tanto, si $f \in L^k(V)$, entonces f queda determinado por las imágenes de todas las $k-$tuplas $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Si en particular f es alternante, entonces el orden de I importa, de modo que adoptaremos un criterio simple para darle un orden. De aquí en adelante, ordenaremos todos los multi índices de manera estrictamente ascendente, es decir, escribiremos $I = (i_1, \ldots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Proposición 3.1.2.1. *Si I y J son dos multi índices de longitud k, entonces*

$$\alpha_I(e_J) = \delta^I_J = \begin{cases} 1 & si\ I = J, \\ 0 & si\ I \neq J. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que

$$\alpha_I(e_J) = det[\alpha_i(e_j)]_{i \in I, j \in J}.$$

Si $I = J$, entonces $[\alpha_i(e_j)]$ es la matriz identidad, y su determinante es 1. Si $I \neq J$, los comparamos elemento a elemento hasta hallar donde difieren:

$$i_1 = j_1, \ldots, i_{l-1} = j_{l-1}, i_l \neq j_l, \ldots.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $i_l < j_l$. Entonces i_l será diferente de $j_1, \ldots, j_{l-1}$ (porque estos son los mismos que $i_1, ..., i_l$, y I es estrictamente ascendente), y i_l también será diferente de $j_l, j_{l+1}, ..., j_k$ (porque J es estrictamente ascendente). Por lo tanto, i_l será diferente de $j_1, ..., j_k$, y la fila l de la matriz $[a_i(e_j)]$ será cero. Por lo tanto, $det[a_i(e_j)] = 0$. $\square$

Proposición 3.1.2.2. *Los $k-$tensores alternantes α_I, forman una base para $\Lambda^k(V)$.*

Demostración. Primero mostramos la independencia lineal. Supongamos que $\sum\limits_I c_I \alpha_I = 0$, $c_I \in \mathbb{R}$, y I recorre todos los multi índices estrictamente ascendentes de longitud k. Al aplicar ambos lados a e_J, $J = (j_1 < \cdots < j_k)$, obtenemos por la proposición anterior

$$0 = \sum_I c_I \alpha_I(e_J) = \sum_I c_I \delta_J^I = c_J,$$

ya que entre todos los multi índices estrictamente ascendentes I de longitud k, solo hay uno igual a J. Esto demuestra que los α_I son linealmente independientes. Para probar que los α_I generan a $\Lambda^k(V)$, vamos a probar que si $f \in \lambda^k(V)$, entonces

$$f = \sum f(e_I)\alpha_J,$$

donde I recorre todos los multi índices estrictamente ascendentes de longitud k. Sea

$$g = \sum_I f(e_I)\alpha_I.$$

Por la linealidad y la propiedad alternante, si dos k-tensores concuerdan en todos los e_J, donde $J = (j_1 < \cdots < j_k)$, entonces son iguales. Pero

$$g(e_J) = \sum f(e_I)\alpha_I(e_J) = \sum f(e_I)\delta_J^I = f(e_J).$$

Por lo tanto, $f = g = \sum f(e_I)\alpha_I$. $\square$

Corolario 3.1.2.1. *Si la dimensión de V es n, entonces la dimensión de $\Lambda^K(V)$ es $\binom{n}{k}$.*

Demostración. Notemos que para formar un multi índice I, debemos escoger k números de $\{1, \ldots, n\}$, lo cual puede hacerse de $\binom{n}{k}$ formas. $\square$

Corolario 3.1.2.2. *Si $k > dimV$, entonces $\Lambda^k(V) = 0$.*

Demostración. En $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$, al menos dos de los factores deben ser iguales, digamos $\alpha_j = \alpha_l = \alpha$. Debido a que α es un $1-$tensor, $\alpha \wedge \alpha = 0$ según el corolario 4.3.0.1, entonces $\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha = 0$. $\square$

3.2. Formas diferenciales y la derivada exterior

Hasta ahora hemos introducido, al contexto de las variedades diferenciables, una de las herramientas fundamentales del Cálculo, que es la derivada o diferencial de una función. Como habría de esperarse, la siguiente tarea debería ser definir la integral. Al igual que el concepto de función diferenciable sobre una variedad, la integral debe definirse de tal forma que no dependa de las coordenadas elegidas. Esta tarea no es sencilla (aunque tampoco muy complicada), y se precisa desarrollar aún mucha teoría para hacerlo satisfactoriamente.

Como sabemos, en nuestros cursos de Cálculo los objetos que se integraban y derivaban eran funciones. En el contexto de las variedades diferenciables, los objetos que se integran y derivan son las *formas diferenciales*, que no son mas que un tipo particular de tensores alternantes. Podemos decir, que las formas diferenciales son la generalización de las funciones en el Cálculo, y como tales también pueden ser derivadas e integradas. En consecuencia, de lo que nos ocuparemos por ahora será definir a las formas diferenciales. Para nuestros propósitos, la integración de formas diferenciales no se tratará en este texto, aunque una buena referencia para hacerlo es Munkers (1991) en su libro "Analysis on manifolds".

Con las herramientas desarrolladas hasta ahora, podemos ver que $(\Lambda^k(T^*M), M, \pi)$ es un fibrado vectorial diferenciable de rango $\binom{n}{k}$ cuando la dimensión de M es n. De este modo, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una $k-forma$ diferencial en M, o simplemente una $k-forma$, es una sección $\omega : M \to \Lambda^k(T^*M)$ que es diferenciable.

Reservamos la notación $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$ para denotar al espacio vectorial de todas las secciones diferenciales en $(\Lambda^k(T^*M), M, \pi)$. Por otra parte, definimos las $0-$formas como $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Observemos además que si $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$ es una carta de una variedad M, entonces las $k-$formas diferenciales son de la forma $\omega = \sum a_I dx_I$, pues los diferenciales dx_I forman un sistema coordenado móvil. En consecuencia, es sencillo notar que el diferencial df de una función f es una $1-$forma, pues recordemos que

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Por otra parte, al ser las k-formas tensores, podemos aplicar sobre ellas el producto cuña, el producto tensorial y todo lo que hemos aprendido anteriormente.

Tal como se mencionó anteriormente, en contraste con el Cálculo tradicional, donde los objetos básicos de estudio son funciones, los objetos básicos en el Cálculo en variedades son las formas diferenciales. Nuestro propósito ahora es aprender a derivar formas diferenciales. A la derivada de las formas diferenciales se le llama *derivada exterior*.

Dependiendo el libro de texto consultado, existen tradicionalmente tres enfoques diferentes desde los que se introduce la derivada exterior. El primer enfoque, que es probablemente el más común y adoptado en la mayoría de los libros de texto de introducción a las matemáticas y la física, es directamente introducir la derivada exterior como una fórmula. El segundo enfoque consta en dar una lista de las propiedades algebraicas (o axiomas) que debería tener la derivada exterior, y posteriormente demostrar que existe un único operador que cumple dichas propiedades y a partir de ahí deducir la fórmula. Los libros que usan este enfoque tienden a ser de naturaleza bastante formal. En el tercer enfoque, se da una definición geométrica en términos del límite de la integral de la forma diferenciable sobre la frontera de un paralelepípedo. Este es un enfoque poco frecuente que tiende a aparecer en textos de ingeniería o física aplicada que quieren enfatizar el significado físico de la derivada exterior. Si bien este enfoque es realmente el más geométrico de todos, requiere definir antes la integración de formas diferenciales que la derivada exterior.

La razón por la cual hay tantos y tan diferentes enfoques con los cuales se puede abordar a la dirivada exterior, es que es difícil ver de inmediato por qué la definición de la derivada exterior de una forma diferencial es la definición "correcta" a adoptar. Básicamente, las consecuencias de la definición de derivada exterior son tan asombrosamente "buenas" que la definición tiene que ser "correcta". Lo que se quiere decir, es que al definir la derivada exterior de una forma diferencial de la manera en que está definida, podemos generalizar perfectamente las principales ideas del Cálculo Vectorial. Por ejemplo, resulta que los conceptos de gradiente, rotacional y divergencia, se convierten todos en casos especiales de la derivada exterior, y el teorema fundamental de las integrales de línea, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia, se convierten en casos especiales de lo que se llama el teorema de Stokes generalizado. En pocas palabras, la definición de derivada exterior es la que es, porque "es la que funciona". Por lo tanto, en este texto usaremos el primer enfoque para definir a la derivada exterior.

Aunque los orígenes de las formas diferenciales no fueron con el propósito de trabajarlas en el contexto de las variedades, es interesante explorar la forma en la que fueron concebidas y su evolución. De hecho, la motivación original para la idea de la integral de una k-forma radica en la teoría de la Variable compleja, y gran parte de su desarrollo fue realizado por físicos.

Definición 3.2.2. La *derivada exterior* es el operador $D : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ con $k \geq 0$ tal que

i) si $f \in \Omega^0(M)$, entonces
$$Df = df,$$

ii) si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces
$$D(\omega \wedge \eta) = D\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge D\eta,$$

iii) si $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces
$$D(D\omega) = 0.$$

Notemos que si $(U, x_1, ..., x_n)$ es una carta para una variedad M, y $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
D\omega &= D\Big(\sum_I a_I dx_I\Big) \\
&= \sum_I D\big(a_I dx_I\big) = \sum_I D\big(a_I \wedge dx_I\big) \\
&= \sum_I \Big((Da_I) \wedge dx_I + (-1)^k a_I D dx_I\Big) \qquad \text{por ii)} \\
&= \sum_I (Da_I) \wedge dx_I + (-1)^k \sum_I a_I D dx_I \\
&= \sum_I (Da_I) \wedge dx_I \qquad \text{pues } D dx_I = 0 \text{ por iii), y i)} \\
&= \sum_I \sum_j^n \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \qquad \text{por i).}
\end{aligned}$$

Definición 3.2.3. Una $k-$forma diferencial ω sobre una variedad M es *cerrada* si $D\omega = 0$, y es *exacta* si $\omega = D\tau$ para alguna $(k-1)-$forma τ. Como $D(D\omega) = 0$, toda forma exacta es cerrada. En general, no toda forma cerrada es exacta.

Los conceptos de *pushforward* y *pullback* son muy importantes y están íntimamente relacionados. En español estos conceptos respectivamente se llaman *aplicación progrediente* y *aplicación regrediente.* Sin embargo, las palabras en inglés representan mejor la naturaleza de estas ideas.

La palabra pushforward puede entenderse como "empujar hacia adelante", mientras que pullback puede entenderse como "jalar hacia atrás". En el contexto de las variedades diferenciables, la idea general básicamente es expresar el hecho de que a partir de una función entre dos variedades $f : M \to N$, podemos "empujar hacia adelante" (pushforward) vectores tangentes de M hacía la variedad N por medio del diferencial $f_* : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$. Por otra parte, si $h : N \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces podemos "jalar hacía atrás" (pullback) a la función h por medio de la función f a través de la composición $h \circ f : M \to \mathbb{R}$. Formalmente, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 3.2.4. Dada una función $f : M \to N$, definimos el *pushforward* de f como la función $f_* = df : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$.

Definición 3.2.5. Dadas dos funciones $f : M \to N$ y $h : N \to \mathbb{R}$, se define el *pullback* de h determinado por f como la función $f^*h = h \circ f : M \to \mathbb{R}$. Cuando el contexto lo permita y no haya riesgo de confusión, podemos denotar al pullback simplemente por f^*.

Como el pullback "jala hacia atrás" funciones, podemos en particular "jalar" $k-$formas de $\Omega^k(N)$ a $\Omega^k(M)$. Formalmente, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2.6. Dada una función $f : M \to N$ y una $k-$forma $\omega \in \Omega^k(N)$, el pullback de ω en $p \in M$ es la función $f^*\omega : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ definida por

$$(f^*\omega)_p(v_1, v_2, ..., v_k) = \omega_{f(p)}((f_*)_p v_1, (f_*)_p v_2, ..., (f_*)_p v_k), \tag{3.1}$$

con $v_i \in T_p(M)$.

La expresión (3.1) indica muy bien la relación que existe entre el pullback y el pushforward. En palabras, podríamos decir que en el punto $p \in M$, la imagen de los vectores v_i bajo la $k-$forma ω "jalada hacia atrás", es decir $(f^*\omega)_p$, es igual a la imagen en el punto $f(p)$ de los vectores v_i "empujados hacia adelante", o sea $(f_*)_p v_i$, bajo la $k - forma\ \omega$.

Capítulo 4

Cohomología de De Rham

Las definiciones y los resultados principales de este capítulo son obtenidos de [2, Cap 1 y 2], [4, Cap 17], [7, Cap 7], [8, Cap 5].

La homología es un concepto que se utiliza en muchas ramas del Álgebra y la Topología. Históricamente, Poincaré utilizó por primera vez el término "homología" en el contexto de la Topología con el propósito de hallar "hoyos" en las variedades, pues estos constituyen un invariante topológico. El concepto de homología procede de un vocablo de la lengua griega que puede traducirse como "correspondencia" o "acuerdo". El término hace mención a la relación que se crea a partir de semejanzas o rasgos idénticos de dos elementos que se encuentran en ámbitos o contextos diferentes. En particular, a nosotros nos interesará la homología existente entre las propiedades topológicas de una variedad diferenciable (en particular los "hoyos" que "tiene" esta) con cierta construcción algebraica que llamamos complejo de cadenas. De esta forma, la homología nos permitirá estudiar las propiedades topológicas de una variedad diferenciable desde el contexto del Álgebra.

Para entrar más en contexto, vamos a introducir de manera informal y aproximada las ideas de la homología para poder entender por qué sirve para detectar "hoyos". Posteriormente daremos una definición formal de homología y complejo de cadenas. Con esto, tendremos casi toda las herramientas necesarias para desarrollar la cohomología de De Rham.

La palabra "hoyo" tiene muchos significados en el habla cotidiana. Podemos decir que es posible hacer un "hoyo" en la tierra, o decir que una olla de cocina tiene un "hoyo". Sin embargo, los matemáticos están interesados en detectar un tipo específico de "hoyos", que pueden describirse como un espacio cerrado y hueco. Un "hoyo" unidimensional podemos pensarlo como una liga. La línea ondulada que forma la liga está cerrada (a diferencia de una cuerda suelta) y hueca (a diferencia del perímetro de una moneda).

Extendiendo esta lógica, un "hoyo" bidimensional parecería una bola hueca. De esta forma, ejemplos de los "hoyos" que buscamos (cerrados y huecos) son los balones de fútbol, pero no las ollas de cocina o las bolas de boliche.

Aunque pensar en "hoyos" de esta manera puede ayudar a nuestra intuición, no es lo suficientemente precisa como para calificar como una definición matemática. No describe claramente los hoyos en dimensiones superiores, por ejemplo. Es por eso que hemos puesto entre comillas siempre a la palabra “hoyo”. De hecho, en matemáticas no existe una definición clara y satisfactoria de la palabra hoyo, de forma que su uso siempre es de una manera informal.

Para estudiar los hoyos, la clave es centrar la atención en las “fronteras”. La frontera de un objeto es la colección de puntos en su periferia, y siempre es una dimensión más baja que la del objeto original. Por ejemplo, la frontera de un segmento de recta (un intervalo cerrado) consta de dos puntos en cada extremo (los puntos se consideran de dimensión cero). La frontera de un triángulo sólido es el triángulo hueco, que consta de aristas unidimensionales. De manera similar, la pirámide sólida tiene por frontera una pirámide hueca.

Si se unen dos segmentos de recta mediante uno de sus puntos frontera de manera que formen una letra V, los puntos frontera donde se encuentran dejan de ser frontera. Por separado, los dos segmentos tenían cuatro puntos frontera en total, pero cuando se unen, la forma resultante solo tiene dos puntos frontera nuevamente.

Si se pega un tercer segmento cerrando la figura, creando así un triángulo hueco, todos los puntos frontera desaparecerán. Cada punto frontera de los tres segmentos se “cancela” con otro al formar el triangulo, y el triángulo hueco queda sin frontera. Entonces, cada vez que una colección de segmentos forman una figura cerrada, la figura resultante no tiene frontera y se forma un hoyo. A las figuras que no tienen frontera las llamaremos ciclos. En consecuencia, todo lo homeomorfo al triángulo hueco es un hoyo, y en consecuencia un ciclo.

Note que las formas cerradas o ciclos solo forman un hoyo si la región central es hueca, como en el caso de una liga. Un triángulo dibujado en un papel es un ciclo pero no es un hoyo porque el centro está lleno. De esta forma, el triangulo es frontera de todo el pedazo de papel que encierra.

Por lo tanto, los hoyos tienen dos importantes características. Primero, un hoyo es algo que no tiene frontera. Y segundo, un hoyo no es frontera de otra cosa. Dicho en otras palabras, un hoyo es un ciclo que no es frontera de otra cosa. El ejemplo del triángulo hueco es perfecto, pues hemos visto que no tiene frontera, y tampoco es frontera de otra cosa.

Note que un hoyo no es algo que tengan las figuras, sino que nos referimos a la figura en sí como un hoyo. Así, decimos que la liga es un hoyo, y no que la liga tiene un hoyo. Es semejante a hacer la distinción al decir que “el río tiene un remolino” a decir que “el remolino es el río”. En este segundo caso, un remolino no es algo que tienen los ríos, sino es una forma en la que se configuran los ríos.

Esta “definición” de hoyo puede extenderse a dimensiones superiores. Un triángulo sólido bidimensional está delimitado por tres aristas. Si une varios triángulos, algunos puntos frontera desaparecen. Cuando cuatro triángulos se acomodan para formar una pirámide hueca, el resultado es un objeto sin frontera, y en consecuencia es un ciclo. Como está hueca la pirámide, es decir, no es frontera de algo más, entonces forma un hoyo bidimensional. Todo lo homeomorfo a esta pirámide también es un ciclo.

Para encontrar todos los tipos de hoyos dentro de un espacio topológico particular, se construye algo llamado complejo de cadenas. Como sabemos, se pueden construir espacios topológicos pegando piezas de diferentes dimensiones. El complejo de cadenas puede entenderse como un diagrama que da las instrucciones del “montaje” de un espacio topológico hecho de otros espacios de dimensiones más bajas. Cada uno de los espacios topológicos involucrados en el montaje se agrupan de acuerdo a su dimensión y luego se organizan jerárquicamente: el primer nivel contiene todos los puntos, el siguiente nivel contiene todas las líneas, etc. (También hay un nivel cero vacío, que simplemente sirve como base). Cada nivel está conectado con el que está debajo de él mediante flechas, que indican cómo están pegados.

Los matemáticos extraen la homología de un espacio topológico y su complejo de cadenas, lo que proporciona datos estructurados sobre los componentes del espacio y sus fronteras, que es exactamente lo que se necesita para encontrar hoyos de todas las dimensiones. Cuando usa el complejo de cadenas, los procesos para encontrar un hoyo de 10 dimensiones y un hoyo unidimensional son casi idénticos (excepto que uno es mucho más difícil de visualizar que el otro).

En su tesis doctoral, Georges De Rham demostró que las formas diferenciales satisfacen las mismas propiedades que los ciclos y las fronteras descritas por la homología, demostrando de hecho una dualidad entre lo que ahora se denomina cohomología de De Rham y la homología singular con coeficientes reales. Aunque De Rham no definió explícitamente su cohomología en ese artículo, estaba implícita en su trabajo. Una definición formal de la cohomología de De Rham apareció hasta 1938.

A partir de los trabajos de Poincaré, muchos matemáticos se dedicaron a estudiar únicamente a los complejos de cadenas, sin considerar sus implicaciones topologicas, creando lo que hoy se conoce como Álgebra Homológica. En lo que sigue de este capítulo, nos vamos a dedicar a introducir las nociones básicas del Álgebra Homológica sin perder de vista sus orígenes.

4.1. Conceptos básicos del Álgebra Homológica

Definición 4.1.1. Un complejo de cadenas consiste en un conjunto de estructuras algebraicas $\{C_i\}$ (todas del mismo tipo, como grupos abelianos, anillos, módulos, espacios vectoriales, etc.) y un conjunto de funciones $\{d_i\}$ que preservan la estructura algebraica, tales que la construcción

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

satisface que $d_k \circ d_{k+1} = 0$, para todo k.

Note que la sucesión es descendente en los subíndices. Dado un complejo de cadenas definida como arriba, definimos al complejo de cocadenas como sigue.

Definición 4.1.2. Un complejo de cocadenas, denotado por $C_\bullet$, consiste en un conjunto de estructuras algebraicas $\{C_i\}$ (todas del mismo tipo) y un conjunto de funciones $\{d_i\}$ que preservan la estructura algebraica, tales que la construcción

$$\cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

satisface que $d_k \circ d_{k-1} = 0$, para todo k.

En términos sencillos, el complejo de cocadenas se obtiene al invertir el sentido de las flechas. Obsérvese que la condición $d_k \circ d_{k-1} = 0$ implica que $im(d_{k-1}) \subseteq ker(d_k)$. Por otra parte, de aquí en adelante asumiremos, sin pérdida de generalidad, que las estructuras algebraicas asociadas a los complejos de cocadenas serán espacios vectoriales. Igualmente todas las definiciones se aplican para grupos, módulos, anillos, etc.

Definición 4.1.3. Una sucesión de transformaciones lineales

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se dice que es *exacta en* B si $im(f) = ker(g)$. Si una sucesión

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} C_n$$

es exacta en cada C_i excepto en C_0 y C_n, decimos simplemente que es *exacta*.

Es sencillo ver que cuando $A = 0$, la sucesión

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es exacta si y solo si $ker(g) = im(f) = 0$, de modo que g es inyectiva. Similarmente, si $C = 0$, entonces la sucesión es exacta si y solo si $im(f) = ker(g) = B$, y por tanto f es sobreyectiva.

Proposición 4.1.0.1. *Supongamos que la sucesión de tres términos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es exacta. Entonces

i) la función f es sobreyectiva si y solo si g es la función cero.

ii) la función g es inyectiva si y solo si f es la función cero.

Demostración. *i*) Supongamos primero que f es sobreyectiva, de modo que $im(f) = B$. Como la sucesión es exacta, entonces, $im(f) = B = ker(g)$, y al ser $B = ker(g)$, se sigue que g es la función cero. Por otra parte, si suponemos que g es la función cero y la sucesión es exacta, entonces $im(f) = B = ker(g)$, cumpliéndose que f es sobreyectiva, pues $im(f) = B$.

ii) Supongamos primero que g es inyectiva y la sucesión es exacta. Entonces $ker(g) = \{0\} = im(f)$, y por tanto f es la función cero. Por otra parte, supongamos que f es la función cero y que la sucesión es exacta. Entonces, $ker(g) = \{0\} = im(f)$, de modo que g es inyectiva. □

Consideremos una complejo de cocadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

como $im(d_{k-1}) \subseteq ker(d_k)$, podemos formar el espacio vectorial cociente

$$H^k(C_\bullet) := \frac{ker(d_k)}{im(d_{k-1})}$$

que se llama el *k-ésimo espacio vectorial de cohomología de $C_\bullet$*. Sirve para saber en qué medida el complejo de cocadenas falla en ser exacta en el espacio C_k.

Los elementos de C_k se llaman *cocadenas de grado k* o también *k-cocadenas*. Una *k-cocadena* de $ker(d_k)$ se llama *k-cociclo* y una *k-cocadena* de $im(d_{k-1})$ se llama *cofrontera*. La clase de equivalencia $[c] \in H^k(C_\bullet)$ de un *k-cociclo* $c \in ker(d_k)$ se llama clase de cohomología.

Si en lugar de un complejo de cocadenas consideráramos un complejo de cadenas, todas las definiciones anteriores se introducen de manera análoga, quitado simplemente el prefijo “co”. De esta manera, quedan definidos los espacios de homología, las *k-cadenas*, *k-ciclos*, etc.

Definición 4.1.4. Si $A_\bullet$ y $B_\bullet$ son dos complejos de cocadenas con funciones $\{d_i\}$ y $\{d'_i\}$ respectivamente, una función de cocadenas $\varphi : A_\bullet \to B_\bullet$ es una colección de transformaciones lineales (o en general funciones que preserven la estructura) $\varphi_k : A_k \to B_k$, una para cada k, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & A_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & A_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{k-1} \arrow[r, "d'_{k-1}"] & B_k \arrow[r, "d'_k"] & B_{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Una función de cocadenas $\varphi : A_\bullet \to B_\bullet$ induce naturalmente una transformación lineal en las cohomologías

$$\varphi^* : H^k(A_\bullet) \to H^k(B_\bullet)$$

dada por

$$\varphi^*[a] = [\varphi(a)].$$

4.2. Categorías y funtores

La Teoría de Categorías es una rama de las matemáticas que proporciona un marco unificado para estudiar la estructura y las propiedades de los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos. Es particularmente útil en áreas de las matemáticas como el Álgebra, la Topología y la Lógica, pero también se ha aplicado a otros campos como la Informática, la Física e incluso la Lingüística.

Una de las principales ventajas de la Teoría de Categorías es que permite una forma más abstracta y general de pensar sobre los objetos matemáticos y sus relaciones. Al estudiar las propiedades de una categoría, que es esencialmente una colección de objetos y flechas entre esos objetos llamadas morfismos, a menudo se pueden inferir las propiedades de los objetos y los morfismos dentro de ella, sin necesidad de conocer los detalles específicos de esos objetos. Esto puede conducir a una mayor percepción y comprensión de las estructuras matemáticas subyacentes.

Otra ventaja de la Teoría de Categorías es que permite la formulación de teoremas y construcciones potentes y generales que se pueden aplicar a una amplia variedad de contextos matemáticos. Por ejemplo, el lema de Yoneda, un resultado fundamental en la Teoría de Categorías, proporciona una forma de comprender las propiedades de los funtores y las transformaciones naturales, que son herramientas importantes en muchas áreas de las matemáticas.

Además, la Teoría de Categorías proporciona un marco para estudiar y razonar sobre las propiedades de diferentes estructuras matemáticas, como estructuras algebraicas o topológicas, de manera similar, independientemente de las características específicas de la estructura. Esto permite una mayor comprensión y simplificación de sistemas matemáticos complejos.

En resumen, la Teoría de Categorías es un marco matemático poderoso que puede ayudar a unificar y simplificar el estudio de estructuras matemáticas complejas y se ha aplicado en muchos campos, brindando una comprensión más profunda de las matemáticas subyacentes.

Definición 4.2.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consta de una colección de objetos $A, B, C, \ldots$ y un conjunto de flechas llamadas morfismos $f, g, h, \ldots$ entre estos objetos, de tal manera que:

- Para cada par de objetos A y B, existe un conjunto $Hom(A, B)$ de morfismos desde A hasta B.
- Para cada cuarteto de objetos A, B, C y D, existe una operación de composición $\circ$: $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \to Hom(A, C)$ que cumple con ser asociativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para todo $f \in Hom(C, D), g \in Hom(B, C)$ y $h \in Hom(A, B)$.
- Para cada objeto A existe un morfismo identidad $id_A \in Hom(A, A)$ tal que para cualquier morfismo $f \in Hom(A, B)$, se tiene $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.

Ejemplo 4.2.1. *La categoria de grupos.*

La categoría de grupos, denotada por $\mathcal{G}$, cuyos objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos. En esta categoría, la composición de morfismos se da por la composición de homomorfismos, y el morfismo identidad para un grupo G es el homomorfismos identidad de G.

Ejemplo 4.2.2. *La categoría de espacios topológicos.*

La categoría de espacios topológicos, denotada por $\mathcal{T}$, cuyos objetos son espacios topológicos y los morfismos son funciones continuas. En esta categoría, la composición de morfismos se da por la composición de funciones porque la composición de funciones continuas es continua, y el morfismo identidad para un espacio topológico X es la función identidad sobre X, la cual es continua.

Ejemplo 4.2.3. *La categoría de complejo de cocadenas.*

Podemos definir la categoría de complejo de cocadenas, denotada $\mathcal{A}^{\text{co}}$, como la categoría cuyos objetos son complejos de cocadenas y morfismos son funciones de cocadenas.

Ejemplo 4.2.4. *La categoría de variedades diferenciables.*

Podemos definir la categoría de variedades diferenciables, denotada $\mathcal{M}^{\text{smooth}}$, como la categoría cuyos objetos son variedades diferenciables y cuyos morfismos son los difeomorfismos.

Definición 4.2.2. Dados dos objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo $f : A \to B$ es un isomorfismo si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.

Definición 4.2.3. Un *funtor covariante*, es una función entre categorías que preserva la estructura de las categorías. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ asigna a cada objeto A en $\mathcal{C}$ un objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$, y a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$ de tal manera que las siguientes propiedades se cumplen:

- $F(id_A) = id_{F(A)}$ para cada objeto A en $\mathcal{C}$,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para cada par compuesto de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ en $\mathcal{C}$.

Teorema 4.2.1. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor covariante. Si $f : A \to B$ es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{C}$, entonces $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Dado que f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, tiene un inverso $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Según la definición de un funtor covariante, $F(f)$ se asigna a f y $F(g)$ se asigna a g. Ahora, mostraremos que $F(g)$ es el inverso de $F(f)$. Por definición de funtor covariante, tenemos que

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)},$$

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(id_B) = id_{F(B)}.$$

Por tanto $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$. □

4.3. Cohomología de De Rham

Si M es una variedad de dimensión n, entonces el conjunto $\{\Omega^0(M), \Omega^1(M), ..., \Omega^n(M)\}$ y el operador diferencial $D : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ determinan un complejo de cocadenas, pues para $\omega \in \Omega^k(M)$, $D(D\omega) = (D \circ D)\omega = 0$. Además, como D es lineal, su kernel e imagen son subespacios. Definamos

$$Z^k(M) = ker(D : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)) = \{k\text{-formas cerradas en } M\},$$

$$B^k(M) = im(D : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)) = \{k\text{-formas exactas en } M\}.$$

Por convención, consideramos a $\Omega^k(M)$ como el espacio nulo cuando $k < 0$ o $n < k$. Como toda forma exacta es cerrada, $B^k(M)$ es un subespacio de $Z^k(M)$, por tanto podemos hablar del espacio de cohomología

$$H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)},$$

el cual recibe el nombre de *k-ésimo espacio de cohomología de De Rham.*

Teorema 4.3.1. *Si una variedad M tiene r componentes conexas, entonces $H^0(M) = \mathbb{R}^r$. Un elemento de $H^0(M)$ está dado por una $r-$tupla de números reales, y cada uno de ellos representa una función constante en una componente conexa de M.*

Demostración. Puesto que no hay $0-$formas exactas

$$H^0(M) = Z^0(M).$$

Supongamos que $f \in H^0(M)$, de modo que $df = 0$. Para cualquier carta $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Por tanto, $df = 0$ en U si y solo si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son cero en U. Esto es equivalente a que f es constante en U. En consecuencia, las $0-$formas cerradas en M son justamente las funciones constantes en M. Tales funciones deben ser constantes en cada componente de M. Si M tiene r componentes conexas, entonces una función constante en M puede expresarse mediante una $r-$tupla ordenada de números reales. Por tanto $Z^0(M) = \mathbb{R}^r$. □

Ejemplo 4.3.1. *Cohomología de De Rham de la recta real.*

Como la recta real $\mathbb{R}$ es conexa, por la proposición anterior

$$H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Por otra parte, sabemos que no hay $2-$formas en $\mathbb{R}$. Esto implica que toda $1-$forma en $\mathbb{R}$ es cerrada. Una $1 - forma\ f(x)dx$ en $\mathbb{R}$ es exacta si y solo si existe una función diferenciable $g(x)$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x)dx = dg = g'(x)dx,$$

donde $g(x)$ es simplemente la antiderivadada $f(x)$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Esto prueba que toda $1-$forma en $\mathbb{R}$ es exacta. Por lo tanto, $H^1(\mathbb{R}) = 0$. En combinación con el hecho de que $\Omega^k(M)$ es el espacio nulo cuando $n < k$, tenemos que

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

El siguiente resultado a exponer se introducirá en forma de axioma. Es un resultado muy poderoso y será el único que enunciaremos y aceptaremos sin demostración, pues su prueba requiere aún de muchos resultados y teoría que se alejan de nuestros propósitos. Existen textos muy buenos que abordan la prueba de este resultado en su total extensión. Tres buenas opciones son [7], [2] y [4].

Teorema 4.3.2. *Sean M y N variedades con el mismo tipo de homotopía, y $f : M \to N$ una equivalencia homotópica. Entonces, la función f induce las funciones*

$$f^k : H^k(N) \to H^k(M)$$

que son todas isomorfismos.

EL teorema anterior insinúa la existencia de un funtor entre dos categorías. Se trata de el *funtor de De Rham*, que asigna a un difeomorfismo $f : M \to N$ entre dos variedades a todos los isomorfismos $f^k : H^k(N) \to H^k(M)$ entre sus espacios de cohomología de De Rham. Por otra parte, el funtor asigna a cada variedad M sus espacios de cohomología de De Rham, que son los espacios de cohomología del complejo de cocadenas de formas diferenciales. El funtor de De Rham es una herramienta poderosa en geometría diferencial y topología, ya que permite estudiar la topología de una variedad utilizando la estructura algebraica del complejo de cocadenas. Dicho en otras palabras, nos permite resolver problemas en el mundo de las variedaes diferenciables desde el mundo del Álgebra.

Corolario 4.3.2.1. *Supongamos que S es una subvariedad de M y F es una retracción por deformación de M a S. Sea $r : M \to S$ la retracción $r(x) = F(x, 1)$. Entonces r induce un isomorfismo en la cohomología*

$$r^* : H^k(S) \to H^k(M).$$

Demostración. Sabemos que toda retracción $r : M \to S$ es una equivalencia homotópica, y por el corolario anterior, la función inducida r^* es un isomorfismo. $\square$

Corolario 4.3.2.2. *(Lema de Poincaré) La cohomología de $\mathbb{R}^n$ es*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & si\ k = 0, \\ 0 & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Como $\mathbb{R}^n$ tiene una sola componente conexa, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Luego, al ser $\mathbb{R}^n$ contráctil vía la homotopía lineal $F(x,t) = q + t(x - q)$ con $q \in \mathbb{R}^n$, entonces tiene la misma cohomología que un punto, cuya dimesnión es 0, de modo que para $k \geq 1$, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$. $\square$

De hecho, es fácil notar que cualquier variedad contráctil tiene las misma cohomología que un punto.

Ejemplo 4.3.2. *Cohomología del plano sin un punto.*

Probemos primero que el plano sin un punto tiene el mismo tipo de homotopía que la circunferencia. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Definamos $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{p\}$ y $g : \mathbb{R}^2 - \{p\} \to S^1$ tales que $f(x) = \frac{x-p}{||x-p||}$ y $g(x) = x$, entonces se tiene

$$f \circ g = I_{S^1} \sim I_{S^1}$$

$$g \circ f \sim I_{\mathbb{R}^2 - \{p\}}$$

donde la homotopía es

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x-p}{||x-p||}$$

con $x \in \mathbb{R}^2 - \{p\}$, $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, como el plano sin un punto tiene el mismo tipo de homotopía que la circunferencia, $H^k(\mathbb{R}^2 - \{p\})$ es isomorfo a $H^k(S^1)$ para todo $k \geq 0$.

Como todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica, se sigue de los corolarios anteriores que *la cohomología de De Rham es un invariante topológico*. Este resultado es notable, porque la definición de los espacios de cohomología de De Rham están íntimamente ligados a la estructura diferenciable de la variedad, y no teníamos ninguna razón a priori para esperar que diferentes estructuras diferenciables en la misma variedad daran lugar a los mismos espacios de cohomología de De Rham.

Para finalizar este trabajo mencionamos uno de los principales invariantes topológicos: *la característica de Euler*, que puede expresarse en términos de la cohomología de De Rham de la siguiente manera:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H^i(M)).$$

Bibliografía

[1] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1986.

[2] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, 3rd corrected printing, Graduate Texts in Math., Vol. 82, Springer, New York, 1995.

[3] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[4] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013.

[5] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology.* Princeton University Press, Princeton, 1966

[6] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, 2, y 5, 3rd ed., Publish or Perish, Houston, TX, 2005.

[7] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Universitext, Springer, New York, 2011.

[8] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, 1983.